Théorèmes de renouvellement pour des fonctionnelles additives associées à des chaînes de Markov fortement ergodiques

Denis Guibourg

T H È S E

Présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE RENNES

pour obtenir

le grade de **DOCTEUR DE L'INSA DE RENNES**

Mention Mathématiques et Applications

PAR

Denis Guibourg

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

TITRE DE LA THÈSE :

Théorèmes de renouvellement pour des fonctionnelles additives associées à des chaînes de Markov fortement ergodiques

Soutenue le 20 janvier 2011 devant la commission d'examen

COMPOSITION DU JURY :

M. P. BOUGEROL	Rapporteur	Université Paris VI
M. M. PEIGNÉ	Rapporteur	Université François Rabelais, Tours
M. J-P. CONZE	Examinateur	Université de Rennes 1
M. Y. GUIVARC'H	Examinateur	Université de Rennes 1
M. J. LEDOUX	Examinateur	INSA de Rennes
M. E. LE PAGE	Examinateur	Université de Bretagne-Sud, Vannes
Mlle. F. PÈNE	Examinatrice	Université de Bretagne Occidentale, Brest
M. L. HERVÉ	Directeur de thèse	INSA de Rennes

Remerciements.

Je tiens en premier lieu à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Loïc Hervé pour la qualité de son encadrement. Sa grande disponibilité, ses encouragements permanents, son exigence et ses conseils judicieux m'ont été très précieux pendant ces quatre années.

Je suis très reconnaissant à Philippe Bougerol et Marc Peigné d'avoir accepté de rapporter cette thèse et d'être présents lors de la soutenance. A la suite de leur lecture attentive, leurs remarques et conseils m'ont permis de préciser certains passages du texte.

Je remercie très sincèrement Jean-Pierre Conze, Yves Guivarch, James Ledoux, Emile Le Page et Françoise Pène d'avoir accepté de participer au jury.

Merci enfin à Evelyne Martinez pour son aide lors du pot de thèse.

Table des matières

INTRODUCTION

Les théorèmes de renouvellement pour une marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ont pour but de préciser le comportement asymptotique, quand $\|a\| \to +\infty$ ($a \in \mathbb{R}^d$), des noyaux potentiels $U_a(\cdot)$ définis formellement, pour $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, par :

$$U_a(g) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[g(S_n - a)\big]. \tag{1}$$

Les conclusions des théorèmes de renouvellement dépendent des conditions usuelles dites lattice ou non-lattice. Par ailleurs, pour donner un sens à $U_a(\cdot)$, la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ doit être transiente, ce qui conduit, dans le cas indépendant et dans le cadre markovien, à considérer les cas suivants :

1. *$d \geq 3$ et $\mathbb{E}[S_1] = 0$ (cas centré),*
2. *$d \geq 1$ et $\mathbb{E}[S_1] \neq 0$ (cas décentré) : dans ce cas le comportement de $U_a(\cdot)$ est précisé lorsque $\|a\| \to +\infty$ dans la direction de la moyenne.*

Cette thèse est consacrée aux théorèmes de renouvellement pour les fonctionnelles additives markoviennes. Elle prolonge les travaux de Guivarc'h [34] en dimension 1 et de Babillot [4] en dimension supérieure, fondés sur la méthode spectrale de Nagaev-Guivarc'h. Les améliorations obtenues dans ce travail sont dues à la nouvelle approche spectrale introduite en 2004 par Hennion et Hervé dans [42], sur la base du théorème de Keller et Liverani [53].

Les théorèmes de renouvellement du cas indépendant.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires (v.a.) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les théorèmes de renouvellement pour la marche aléatoire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ sont classiques. Redonnons en ici un bref historique en privilégiant (comme dans la thèse en général) la condition non-lattice, signifiant ici que S_n n'est pas à valeurs dans un sous-groupe fermé propre de $\mathbb{R}^d$. Dans les références au cas lattice mentionnées ci-dessous, S_n est en fait supposée à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. Précisons aussi, avant de revenir sur ce point à la fin de l'introduction, que les énoncés (et les preuves) du cas lattice sont très proches de ceux du cas non-lattice.

En dimension $d = 1$, le théorème de renouvellement a été établi dans le cas lattice par Erdös, Feller et Pollard [24] en 1949 puis, dans le cas général, par Blackwell [10, 11]. Dans le cas non-lattice, le théorème de Blackwell assure que, si $m := \mathbb{E}[X_1] \in]0, +\infty]$, on a alors, pour toute fonction g directement Riemann intégrable :

$$\lim_{a\to-\infty} U_a(g) = 0, \qquad \lim_{a\to+\infty} U_a(g) = \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} g(x)dx. \tag{2}$$

Il existe aujourd'hui de nombreuses preuves de ce théorème, la plus classique fondée sur l'équation de renouvellement se trouvant dans le livre de Feller [25]. Voir également [23]. Une démonstration utilisant la transformée de Fourier est donnée dans le livre de Breiman [12] : $\{U_a(\cdot),\, a \in \mathbb{R}\}$ est alors vue comme une famille de mesures de Radon sur $\mathbb{R}$, et la conclusion (2) est établie en termes de convergence vague.

En dimension $d \geq 2$, les théorèmes de renouvellement ont d'abord été prouvés dans le cas lattice, par Spitzer [70] en 1964 dans le cas centré, puis par Ney et Spitzer en 1966 [65] dans le cas décentré. L'extension au cas non-lattice a été obtenue par Doney [21] en 1965 sous la condition de Cramer[1], et cette dernière hypothèse a été remplacée par la condition non-lattice dans le travail de Stam [71] en 1969. Dans le cas non-lattice, les conclusions principales en dimension $d \geq 2$ s'énoncent de la manière suivante, sachant que les constantes positives notées C_d et C'_d ci-dessous dépendent uniquement de la dimension d :

(i) Cas $d \geq 3$ et $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Soit $m_d := \max(d-2, 2)$. Si $\mathbb{E}[\|X_1\|^{m_d}] < +\infty$, on a alors, en notant $\Sigma = \mathbb{E}[X_1^* X_1]$ la matrice de covariance de X_1 :

$$\lim_{\|a\| \to +\infty} \langle \Sigma^{-1} a, a \rangle^{\frac{d-2}{2}} U_a(g) = C_d \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx, \tag{3}$$

(ii) Cas $d \geq 2$ et $\vec{m} := \mathbb{E}[X_1] \neq 0$. Soit $m_d := \max(\frac{d-1}{2}, 2)$. Si $\mathbb{E}[\|X_1\|^{m_d}] < +\infty$, alors :

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} U_{\tau \vec{m}}(g) = C'_d \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx. \tag{4}$$

Sous la condition de Cramer, la vitesse de convergence dans (4) est précisée dans [15, 16]. Dans les travaux précédents, les résultats sont démontrés en termes de convergence vague. Les conclusions (3) et (4) sont donc valides pour les fonctions réelles g continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$. Cette restriction (par rapport au théorème de Blackwell) s'explique par le fait que les preuves de (3) et (4) reposent sur des techniques de transformée de Fourier.

Les techniques de transformée de Fourier utilisées par Spitzer et Stam.

Sans aucune hypothèse particulière sur le modèle, il est facile de voir, grâce à la formule d'inversion de Fourier, que le terme général $\mathbb{E}[g(S_n - a)]$ de $U_a(g)$ s'écrit comme suit pour $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intégrable admettant une transformée de Fourier $\hat{g}$ également intégrable :

$$\mathbb{E}[g(S_n - a)] = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t)\, \mathbb{E}[e^{i\langle t, S_n \rangle}]\, e^{-i\langle t, a \rangle}\, dt. \tag{5}$$

Cette formule est le point de départ des méthodes dites de Fourier en théorie des probabilités. Notons que, dans le cas indépendant, on a $\mathbb{E}[e^{i\langle t, S_n \rangle}] = \phi(t)^n$, avec $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X_1 \rangle}]$.

La preuve des théorèmes de renouvellement dans [70] et [71] est basée sur un raffinement du théorème limite local, dû à Smith [69] en dimension 1 et étendu en dimension supérieure par Spitzer [70, Th. P7.10]. Le théorème de Smith-Spitzer, qui repose lui même sur la formule (5), est appliqué directement à l'étude du noyau potentiel $U_a(\cdot)$ dans [70]. Dans le cas décentré étudié par Stam [71], l'approche est plus compliquée. En effet, dans un premier temps, Stam adapte la démonstration du théorème limite local de Spitzer pour étudier la série intermédiaire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(d-1)/2} \Big(\mathbb{E}[g(S_n - a)] - \mathbb{E}[g(\widetilde{S}_n - a)] \Big),$$

où $(\widetilde{S}_n)_{n \geq 1}$ est la marche aléatoire définie à partir d'une suite $(\widetilde{X}_n)_{n \geq 1}$ de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $\widetilde{X}_1$ de loi normale admettant la même espérance et variance que X_1. Le comportement de la série $W_a(g) := \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(d-1)/2} \mathbb{E}[g(S_n - a)]$, puis celui de $U_a(g)$, est déduit ensuite de cette étude préliminaire.

[1] Cette condition, plus forte que l'hypothèse non-lattice, requiert $\overline{\lim}_{\|t\| \to +\infty} |\mathbb{E}\big[\, e^{i\langle t, X_1 \rangle} \,\big]| < 1$.

Les techniques de transformée de Fourier de Breiman et Babillot.

Les techniques de transformée de Fourier utilisées par Breiman [12] et Babillot [4] n'utilisent pas le théorème local de Smith et portent en outre directement sur les noyaux potentiels $U_a(\cdot)$. On se place pour simplifier dans le cas indépendant. Le point de départ est à nouveau (5), dont on déduit l'égalité (formelle) suivante, en posant $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X_1\rangle}]$:

$$U_a(g) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t) \,\big(\sum_{n=1}^{+\infty} \phi(t)^n\big)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(t)\, \frac{\phi(t)}{1-\phi(t)}\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt. \qquad (6)$$

Les problèmes d'intégration dans (6) se posent quand $|\phi(t)| \to 1$ et c'est le cas quand $t \to 0$. En dimension $d \geq 2$ (cas décentré) ou $d \geq 3$ (cas centré), il n'y a en fait aucun problème en 0 car il est facile de voir que la fonction $t \mapsto \frac{\phi(t)}{1-\phi(t)}$ est intégrable en $t = 0$. En revanche en dimension 1, cette fonction n'est pas intégrable en 0.

La question d'intégrabilité en dehors de $t = 0$ est liée à la condition non-lattice. En effet, en termes de fonction caractéristique, cette condition assure que l'on a $|\phi(t)| < 1$ pour $t \neq 0$. Une condition suffisante simple pour définir l'intégrale de (6) en dehors de 0 est la condition de Cramer : $\overline{\lim}_{\|t\|\to+\infty}|\phi(t)| < 1$, mais cette condition est en fait inutilement restrictive : en effet, comme démontré dans le livre de Breiman [12], la convergence vague d'une suite de mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ peut être testée sur la classe $\mathcal{H}$ des fonctions intégrables $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ dont la transformée de Fourier $\hat{g}$ est à support compact. Considérée avec une telle fonction g, la dernière intégrale dans (6) est calculée sur le support (compact) de $\hat{g}$, de sorte que, sous la seule condition non-lattice, cette intégrale est bien définie en dehors de 0.

En conclusion, pour toute fonction $g \in \mathcal{H}$, les intégrales dans (6) sont définies en dimension $d \geq 2$. En dimension $d = 1$, seul le problème en 0 subsiste : il a été résolu par Breiman [12] en considérant les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \mathbb{E}[g(S_n - a)]$ pour $r \in [0, 1[$, et en faisant tendre r vers 1 ensuite. À cette difficulté près en dimension 1, la question de la convergence vague de la famille $\{U_a(\cdot),\, a \in \mathbb{R}^d\}$ (correctement normalisée pour $d \geq 2$)[2] est donc ramenée à l'étude (non triviale) du comportement asymptotique quand $\|a\| \to +\infty$ de la dernière intégrale dans (6). La limite obtenue est toujours proportionnelle à $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx$, ce qui explique la présence de la mesure de Lebesgue dans (2), (3) et (4).

Théorèmes de renouvellement pour les fonctionnelles additives markoviennes.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à espace d'états E quelconque. On appelle fonctionnelle additive toute marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$S_n = \xi(X_1) + \ldots + \xi(X_n), \qquad (7)$$

avec $\xi : E \to \mathbb{R}^d$ mesurable. Les noyaux potentiels $U_a(\cdot)$ sont alors définis comme en (1), mais cette fois l'espérance $\mathbb{E}[\cdot]$ dépend des données initiales (X_0, S_0) : en général on pose $S_0 = 0$, en revanche la loi de X_0, notée μ (i.e. la probabilité initiale de $(X_n)_{n\geq 0}$) doit être précisée : l'espérance associée est alors notée $\mathbb{E}_\mu[\cdot]$. Les conditions de centrage sont définies ici à partir de la probabilité stationnaire, notée π, de $(X_n)_{n\geq 0}$, à savoir : $\pi(\xi) = 0$ dans le

[2] En vertu de (6), pour $d \geq 2$, $U_a(\cdot)$ converge vaguement vers la mesure nulle sur $\mathbb{R}^d$ quand $\|a\| \to +\infty$ d'après le théorème de Lebesgue-Riemann.

cas centré, $\pi(\xi) \neq 0$ dans le cas décentré. Enfin les conclusions attendues des théorèmes de renouvellement sont celles du cas i.i.d. ci-dessus.

En dimension $d = 1$, lorsque $(X_n)_{n\geq 0}$ est supposée récurrente au sens de Harris, les résultas sont aujourd'hui bien connus, le travail le plus complet dans cette direction étant l'article de Alsmeyer [1] (1994) qui généralise complètement le théorème de Blackwell dans le cadre général des marches aléatoires markoviennes (définies à la fin de l'introduction). On trouvera également dans [2] de nombreuses références relatives au renouvellement markovien uni-dimensionnel, qui ont recours comme dans [1] à des conditions de récurrence, voir aussi [52]. Dans le cadre des produits de matrices aléatoires, l'extension du théorème de Blackwell a été obtenue par Kesten [54] et Le Page [58].

Toujours en dimension 1, mais sans l'hypothèse de Harris-récurrence, les arguments de transformée de Fourier de Breiman ont été généralisés par Guivarc'h (voir [34]) aux fonctionnelles additives associées à une chaîne de Markov fortement ergodique (voir également [56, 14, 41]). Rappelons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est dite fortement ergodique sur un certain espace de Banach $\mathcal{B}$ (composé de fonctions définies sur E, ou de classes modulo π) si sa probabilité de transition $Q(x, dy)$ opère continûment sur $\mathcal{B}$, si sa probabilité stationnaire π définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}$, et enfin si l'on a au sens de la convergence en norme d'opérateurs sur $\mathcal{B}$:

$$\lim_n Q^n = \Pi, \tag{8}$$

où Π est le projecteur de rang 1 sur $\mathcal{B}$ associé à la probabilité stationnaire : $\Pi(f) = \pi(f)\, 1_E$, avec la notation usuelle 1_E pour désigner la fonction identiquement égale à 1 sur E.

La méthode utilisée dans [34] (cf. aussi [14, 41]) s'inspire des techniques de perturbations d'opérateurs introduites par Nagaev [64]. Cette méthode dite spectrale, qui est rappelée ci-dessous, a été étendue par Babillot [4] en 1988 pour établir les théorèmes de renouvellement markoviens en dimension $d \geq 2$.

La méthode spectrale (cas des chaînes finies).

Comme déjà indiqué, la formule (5) est générale. Cependant l'hypothèse d'indépendance joue un rôle essentiel pour obtenir l'égalité (6). Dans le cas d'une fonctionnelle additive markovienne (cf. (7)), la méthode spectrale consiste à remplacer l'égalité $\mathbb{E}[e^{i\langle t,S_n\rangle}] = \phi(t)^n$ du cas i.i.d. par une formule induisant la puissance n-ème de l'opérateur de Fourier $Q(t)$ associé au noyau

$$Q(t)(x, dy) = e^{i\langle t,\xi(y)\rangle} Q(x, dy),$$

où $Q(x, dy)$ est la probabilité de transition de $(X_n)_{n\geq 0}$ et ξ est la fonction de (7). Noter que $Q(0) = Q$. Si E est l'espace d'états de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ et μ sa probabilité initiale, la formule en question, obtenue facilement en utilisant la propriété de Markov, est la suivante

$$\mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,S_n\rangle}] = \int_E Q(t)^n 1_E\, d\mu = \mu(Q(t)^n 1_E), \tag{9}$$

où $Q(t)^n 1_E$ est la fonction $(Q(t) \circ \cdots \circ Q(t))(1_E)$ (n itérations). L'objectif est ici de reproduire les méthodes de Breiman-Babillot. Pour comprendre les techniques d'opérateurs mises en jeu, on suppose ici pour simplifier que l'espace d'états E de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est fini. Alors

$Q = (q_{i,j})$ est une matrice markovienne, $Q(t) = (e^{i\langle t,\xi(j)\rangle}\, q_{i,j})$ est une perturbation (en $t = 0$) de Q, et grâce à (9), l'objectif fixé est lié à la convergence de la série de matrices $\sum_{n\geq 1} Q(t)^n$.

Étude de $Q(t)^n$ en dehors de $t = 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n\geq 1} Q(t)^n$ converge est que le rayon spectral $r(Q(t))$ de la matrice $Q(t)$ soit < 1. Par définition de $Q(t)$, on a toujours $r(Q(t)) \leq 1$. Par conséquent, l'hypothèse précédente est exactement le substitut matriciel de la condition non-lattice du cas indépendant (i. e $\forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ |\phi(t)| < 1$). Sous la condition spectrale précédente, on a $\sum_{n\geq 1} Q(t)^n = Q(t)\,(I - Q(t))^{-1}$, où I est la matrice identité, et cette dernière fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (en la variable t).

Étude de $Q(t)^n$ au voisinage de $t = 0$.
Afin d'utiliser en $t = 0$ le théorème de perturbation (usuel), on suppose que la valeur propre 1 de Q est simple et que le réel 1 est l'unique valeur propre de module 1 de Q. Alors, pour $|t|$ petit, $Q(t)$ admet une valeur propre dominante simple, notée $\lambda(t)$, régulière (en t) au voisinage de 0 avec $\lambda(0) = 1$, les autres valeurs propres de $Q(t)$ étant de module $\leq \kappa$, avec $\kappa < 1$. Donc pour $|t|$ petit, on peut écrire

$$Q(t)^n = \lambda(t)^n\, \Pi(t) + N(t)^n, \tag{10}$$

où $\Pi(t)$ est le projecteur de rang 1 associé à $\lambda(t)$, et $N(t)$ est une matrice telle que la norme matricielle de $N(t)^n$ soit un $O(\kappa^n)$. Ainsi, en posant $L(t) = \mu(\Pi(t)^n 1_E)$, la formule (9) s'écrit

$$I\!\!E_\mu[e^{i\langle t,S_n\rangle}] = \lambda(t)^n\, L(t) + O(\kappa^n). \tag{11}$$

Cette dernière égalité est cette fois très proche du cas i.i.d., au terme additif près $O(\kappa^n)$, et au terme multiplicatif près $L(t)$ qui tend vers $\mu(\pi(1_E)) = 1$ quand $t \to 0$.

Sous les hypothèses spectrales introduites ci-dessus, on peut donc appliquer les techniques de Breiman-Babillot, et par conséquent étendre aux fonctionnelles additives de chaînes de Markov finies, les théorèmes de renouvellement du cas i.i.d..

Extension aux chaînes fortement ergodiques.

Pour étendre la méthode spectrale aux chaînes de Markov d'espace d'états E quelconque, la condition $r(Q(t)) < 1$ pour $t \neq 0$ doit être conservée : en pratique, cette hypothèse peut être réduite à une condition simple de type "non-lattice", portant sur la probabilité de transition Q et la fonction ξ. Par ailleurs, on observe que la condition spectrale imposée ci-dessus à la matrice markovienne Q (1 est valeur propre simple et l'unique valeur propre de module 1) est équivalente à la condition de forte ergodicité (8) sur l'espace $\mathbb{C}^N$, où N est le cardinal de E. Cette condition est essentielle pour appliquer le théorème de perturbation. On conserve, dans le cas général, l'hypothèse de forte ergodicité, mais cette fois-ci relativement à un espace de Banach $\mathcal{B}$ de dimension infini. Et, contrairement au cas fini, les propriétés des noyaux de Fourier $Q(t)$ ne sont plus automatiques. Par exemple, il faut supposer que $Q(t)$ a une action continue sur $\mathcal{B}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. Ensuite, pour appliquer la théorie standard de perturbations d'opérateurs, avec la régularité souhaitée pour établir les théorèmes de renouvellement, il faut supposer $Q(\cdot)$ suffisamment régulière de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace des endomorphismes continus de $\mathcal{B}$.

La condition la plus contraignante porte sur la régularité de $Q(\cdot)$. En effet, cette condition requiert en substance que le noyau $\|\xi(y)\|^{m_d}\, Q(x, dy)$ opère continûment sur $\mathcal{B}$, avec $m_1 = 1$

en dimension $d = 1$, m_d donné dans (3) ou (4) en dimension $d \geq 2$. Cette condition de moment de type "opérateur" est assez restrictive car elle impose en particulier $Q(\|\xi\|^{m_d+\varepsilon} f) \in \mathcal{B}$, pour tout $f \in \mathcal{B}$. En pratique, cette dernière condition est difficilement réalisable si la fonction ξ n'est pas bornée. Elle est bien adaptée si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach et $\xi \in \mathcal{B}$. Mais les algèbres de Banach étant en général constituées de fonctions bornées, cette dernière condition conduit aussi à supposer ξ bornée.

Une nouvelle approche, introduite dans [42] pour établir les raffinements usuels du théorème limite central markovien, consiste à remplacer la théorie classique de perturbations d'opérateurs par le théorème de Keller et Liverani [53]. Cette approche, qui permet d'affaiblir fortement la condition de moment fonctionnelle ci-desssus, est largement décrite dans [48].

Le contenu et les contributions de cette thèse.

Dans cette thèse, la méthode spectrale généralisée, via le théorème de Keller-Liverani, est appliquée pour établir les théorèmes de renouvellement (2), (3) et (4), en termes de convergence vague de mesures, pour les fonctionnelles additives de chaînes de Markov fortement ergodiques. Dans les travaux [34, 4, 14, 41], les techniques de transformées de Fourier et les méthodes d'opérateurs sont présentées conjointement dans les preuves. Dans ce travail, on a choisi par commodité de séparer complètement ces deux parties.

Ainsi, dans une première partie, on introduit les conditions naturelles portant sur la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[e^{i\langle t,S_n\rangle}]$ permettant d'établir les propriétés de renouvellement (2), (3) et (4) à l'aide des méthodes de transformée de Fourier de Breiman-Babillot. Comme déjà mentionné, ces dernières sont plus directes que les méthodes Spitzer-Stam, et ce choix permettra par ailleurs de démontrer des théorèmes de renouvellement avec un même fil conducteur, quelque soit la dimension et les cas (décentré et centré) considérés. Ce choix a un léger inconvénient en dimension $d \geq 2$: en effet, dans les théorèmes de renouvellement ainsi obtenus, l'ordre des conditions de moment sera optimal à $\varepsilon > 0$ près. Mais cet inconvénient n'aura pas d'effet dans nos applications au cadre markovien car les techniques d'opérateurs utilisées dans ce contexte et décrites ci-dessous induiront également une perte (arbitrairement petite) en termes de conditions de moments.

Cette première partie ne comporte pas de résultats nouveaux. Néanmoins certains passages dans les méthodes de transformée de Fourier de [4, 5] ont été précisés et simplifiés. On a privilégié en particulier une approche élémentaire des estimations asymptotiques en évitant par exemple d'admettre certains résultats sur les distributions tempérées et les fonctions de Bessel.

La seconde partie est consacrée aux fonctionnelles additives des chaînes de Markov fortement ergodiques : on y présente les méthodes spectrales permettant de vérifier les conditions introduites dans la première partie. Cette partie peut elle-même être séparée selon les trois sous-parties suivantes :

• Dans les chapitres 3 et 4, l'approche usuelle, fondée sur la théorie standard de perturbations d'opérateurs, est rappelée. Ces deux chapitres ne comportent donc pas de résultats nouveaux, mais ils permettent, d'une part d'introduire dans un cadre plus simple les outils fonctionnels et d'autre part de mieux comprendre par la suite les améliorations obtenues grâce au théorème de Keller-Liverani. Quelques exemples simples y sont traités en détail avec des réductions très simples de la condition spectrale "non-lattice" mentionnée plus haut.

• Dans le chapitre 5, la méthode spectrale généralisée est appliquée pour établir les propriétés de renouvellement (2), (3) et (4). Un premier résultat[3] est obtenu en dimension 1 en utilisant uniquement le théorème de Keller-Liverani. Les autres résultats, valables en toute dimension, utilisent la procédure de dérivation de $t \mapsto (zId - Q(t))^{-1}$ développée dans [48], en la précisant cependant car deux difficultés supplémentaires se présentent dans le cadre du renouvellement : cette procédure doit être appliquée sur $\mathbb{R}^d$, et non plus seulement au voisinage de $t = 0$, avec en outre un ordre de régularité fractionnaire, et non plus nécessairement entier. La procédure donnée au chapitre 5, qui répond en même temps aux deux points précédents, met en jeu comme dans [48], non pas un seul espace de Banach $\mathcal{B}$, mais toute une famille d'espaces $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_{m_d}$ (croissante pour l'inclusion). La condition de moment fonctionnelle qui en résulte (en substance) est la suivante :

$$f \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow Q(\|\xi\|^{m_d+\varepsilon} f) \in \mathcal{B}_{m_d}.$$

On observera que cette dernière condition est plus faible que celle induite par la méthode spectrale usuelle car $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{m_d}$. Par conséquent, le champ d'applications des résultats[4] du chapitre 5 est ainsi élargi si l'on compare avec les résultats obtenus dans [34, 4, 14, 41]. On démontre en particulier que les conclusions (2), (3) et (4) s'appliquent aux modèles markoviens suivants :

(I) Les chaînes de Markov ρ-mélangeantes, cadre qui contient en particulier les chaînes uniformément ergodiques. Ces modèles sont étudiés dans [68].

(II) Les chaînes de Markov V-géométriquement ergodiques, dont on trouvera de nombreux exemples dans [62].

(III) Les modèles itératifs Lipschitziens (stables), largement décrits dans [22, 20].

Les exemples (I) et (II) sont présentés à la fin du chapitre 5 : on obtient (2), (3) et (4) sous la condition de moment suivante : $\pi(\|\xi\|^{m_d+\varepsilon}) < +\infty$ pour (I), et $\|\xi\|^{m_d+\varepsilon} \leq cV$ pour (II), avec dans les deux cas, $m_1 = 1$ en dimension $d = 1$, m_d donné dans (3) ou (4) en dimension $d \geq 2$, et avec enfin $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

• L'exemple (III) est présenté au chapitre 6. Plus précisément, les propriétés de renouvellement (2), (3) et (4) y sont établies pour les fonctionnelles additives associées à la chaîne double $((F_n, X_{n-1}))_{n\geq 1}$, où $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite i.i.d. de transformations lipschitziennes aléatoires définissant le modèle itératif $(X_n)_{n\geq 1}$ (à partir de sa position initiale X_0). Comme dans [42, 48], on utilise dans cette étude des espaces de fonctions Lipschitz à poids, initialement introduits par Le Page [58]. Cependant, pour cette étude, on a introduit ici une nouvelle forme de poids[5]. Les calculs (assez techniques) sur les espaces de fonctions Lipschitz à poids, portant d'une part sur la vérification des hypothèses du théorème de Keller-Liverani et d'autre part sur la dérivation des opérateurs de Fourier, sont comparables à ceux de [42, 48] effectués pour

[3] Ce résultat a été présenté dans la note [31] parue au C.R.A.S. en 2008.

[4] Le cas centré en dimension $d \geq 3$ a fait l'objet d'un article [32] accepté dans la revue "Potential Analysis". Un papier correspondant au cas décentré en dimension $d \geq 2$ est en cours de rédaction.

[5] Ce résultat, communiqué oralement à Hervé et Pène, a permis dans [48] de diviser par 2 l'ordre des conditions de moment pour les fonctionnelles additives associées à la chaîne simple $(X_n)_{n\geq 1}$, et de démontrer ainsi des théorèmes limites sous des conditions de moments proches (à ε près) de ceux du cas i.i.d..

les fonctionnelles additives associées uniquement à $(X_n)_{n\geq 1}$. Ces calculs [6] ont été effectués conjointement avec Déborah Ferré. L'étude de la chaîne double $((F_n, X_{n-1}))_{n\geq 1}$ présente un intérêt pour les produits de transformations aléatoires. La chaîne double intervient également dans l'étude statistique des modèles itératifs, qui induit des fonctionnelles additives de la chaîne $((X_{n-1}, X_n))_{n\geq 1}$, donc de $((F_n, X_{n-1}))_{n\geq 1}$. Le premier point est illustré par une application aux produits de transformations aléatoires dites topicales permettant de compléter les résultats de Merlet [61].

Nous terminons cette introduction par deux remarques qui seront détaillées par la suite dans la thèse.

Le cas lattice.
Les théorèmes de renouvellement du cas lattice sont obtenus en remplaçant essentiellement la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par une mesure de comptage. En effet, considérons pour simplifier le cas où la suite (X_n) est une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, et reprenons la méthode de Breiman-Babillot à partir de la formule (6). Comme tout d-uplet de $2\pi\mathbb{Z}^d$ est une période de la fonction caractéristique $\phi(\cdot)$ de X_1, la dernière intégrale de (6) peut être ramenée par périodisation sur $[-\pi, \pi]^d$, avec $\hat{g}$ remplacée par sa périodisée : $G(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{g}(\cdot + 2\pi k)$. L'étude asymptotique quand $\|a\| \to +\infty$ s'effectue alors comme dans le cas non-lattice, mais cette fois la limite est proportionnelle à $G(0)$ et donc à $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g(k)$ d'après la formule sommatoire de Poisson. Les remarques précédentes s'appliquent dans le cadre plus général du chapitre 2, et en particulier au cadre markovien, voir les chapitres 4 et 5.

Extensions aux marches aléatoires markoviennes.
Une marche aléatoire markovienne est une chaîne de Markov $((X_n, S_n))_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$ dont la probabilité de transition P vérifie la condition d'additivité suivante : $\forall (x, s) \in E \times \mathbb{R}^d$, $\forall (A, S) \in \mathcal{E} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$P((x, s), A \times S) = P((x, 0), A \times (S - s)). \tag{12}$$

L'exemple le plus classique de marches aléatoires markoviennes est fournie par les fonctionnelles additives considérées plus haut. Les résultats théoriques de cette thèse s'étendent aux marches aléatoires markoviennes générales, sous réserve d'une adaptation naturelle des hypothèses. Voir fin du chapitre 5.

[6] Les résultats obtenus au chapitre 6 sont utilisés dans un travail en cours [27], effectué en collaboration avec D. Ferré et L. Hervé. Ce papier contient notamment des résultats statistiques fondés sur des calculs du chapitre 6.

Liste des principales notations utilisées.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $\| \cdot \|$) le produit scalaire (resp. la norme euclidienne) canonique de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).

Pour tout $R > 0$, on note $B(0, R)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$: $B(0, R) := \{t \in \mathbb{R}^d : \|t\| < R\}$.

Pour tous $0 < r < r'$, on note $K_{r,r'}$ la couronne ouverte de $\mathbb{R}^d$: $K_{r,r'} = \{t \in \mathbb{R}^d : r < \|t\| < r'\}$.

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^d$. On note $d(A, B) := \inf\limits_{(x,y) \in A \times B} \|x - y\|$ la distance (euclidienne) de A à B.

Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on note u_a la fonction définie : $u_a(x) := u(x - a)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

On note $(\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d), \| \cdot \|_1)$ l'espace de de Banach complexe des (classes de) fonctions intégrables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.

$\mathcal{L}_d$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On note $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, à support compact.

On note $S(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}^d$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et à décroissance rapide.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$.

On note $*$ le produit de convolution de fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}^d$.

Soient $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace vectoriel normé, $\tau \in]0, 1]$, A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$ et V une fonction de A dans X. On définit dans $[0, +\infty]$:

$$\big\|V\big\|_{0,A} = \sup_{t \in A} \|V(t)\|_X \quad \text{et} \quad \big[V\big]_{\tau,A} := \sup\Big\{\frac{\|V(t) - V(t')\|_X}{\|t - t'\|^\tau},\ (t, t') \in A^2,\ t \neq t'\Big\}.$$

On dit que V est uniformément τ-höldérienne sur A si $\big[V\big]_{\tau,A} < +\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
Soient $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, X)$ est constitué des fonctions $U : \mathcal{O} \to X$ vérifiant les conditions suivantes :

- U est $\lfloor m \rfloor$ fois continûment différentiable sur $\mathcal{O}$,
- les dérivées partielles d'ordre $j = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor$ de U sont bornées sur $\mathcal{O}$,
- les dérivées partielles d'ordre $\lfloor m \rfloor$ de U sont uniformément $(m - \lfloor m \rfloor)$-höldériennes sur $\mathcal{O}$.

Soient $K \subset \mathcal{O}$ et $f \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$. On note :

$$\big\|f\big\|_{m,K} = \sum_{|\beta| \leq \lfloor m \rfloor} \big\|\partial^\beta f\big\|_{0,K} + \sum_{|\beta| = \lfloor m \rfloor} \big[\partial^\beta f\big]_{\tau,K}.$$

L'espace $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ est muni de la norme $\big\| \cdot \big\|_{m,\mathcal{O}}$.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach . La notation $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ signifie que $\mathcal{B}_1$ est inclus dans $\mathcal{B}_2$ et que l'injection canonique de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$ est continue.

Soit $(\mathcal{B}, \| \cdot \|_\mathcal{B})$ un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ l'espace de Banach des endomorphismes

continues de $\mathcal{B}$ muni de sa norme subordonnée noté aussi $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$, muni de la norme subordonnée notée $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. On note $\rho(T) := \{z \in \mathbb{C},\ zId - T \text{ inversible}\}$ l'ensemble résolvant de T, $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ le spectre de T et $r(T)$ le rayon spectral de T.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ (v.a.r), intégrable (ou positive). On note $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$ son espérance.

Liste des principales hypothèses.

Nous regroupons ici pour la commodité du lecteur les principales hypothèses introduites dans ce travail.

1. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{R}^{+*}$. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $((X_n, S_n))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires (v.a.) définies sur Ω et à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$. Soit $f : E \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable *fixée* telle que

$$\forall n \geq 1, \ \mathbb{E}[f(X_n)] < +\infty. \tag{13}$$

Hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$:

Les deux conditions suivantes sont supposées satisfaites :

(i) Il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in B(0, R)$ et tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}\big] = \lambda(t)^n\, L(t) + R_n(t)$$

où $\lambda(0) = 1$, $\lambda(\cdot)$ et $L(\cdot)$ sont des fonctions de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0,R), \mathbb{C}\big)$ et $\sum_{n\geq 1} R_n(\cdot)$ converge uniformément dans $B(0,R)$ vers une fonction de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0,R), \mathbb{C}\big)$.

(ii) Pour tous $0 < r < r'$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$ converge uniformément dans $K_{r,r'}$ vers une fonction de $\mathcal{C}_b^m\big(K_{r,r'}, \mathbb{C}\big)$.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x, dy)$, et de probabilité Q-invariante π. Soient ξ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}^d$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ la suite de v.a., à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(X_k).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on note $Q(t)$, le noyau de Fourier défini par :

$$Q(t)(x, dy) = e^{i\langle t,\, \xi(y)\rangle} Q(x, dy).$$

Hypothèse (B) :

Un espace de Banach $\mathcal{B}$ vérifie l'hypothèse **(B)** *si $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\pi)$ et $1_E \in \mathcal{B}$, ou bien si $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{L}^1(\pi)$ et la classe $Cl(1_E)$ de 1_E (modulo π) est dans $\mathcal{B}$.*

Hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$:

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)**. *On suppose que :*

(i) Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$, i. e. $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ et $\lim_{n\to+\infty} \|Q^n - \Pi\| = 0$ où $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ est défini pour tout $f \in \mathcal{B}$ par :

$$\Pi f = \pi(f) 1_E,$$

(ii) Pour tout ouvert borné $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$, $t \mapsto Q(t) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$.

Hypothèse (NA) :
Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe $C_K > 0$ et $\rho_K \in [0, 1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in K, \ \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_{_K}\, \rho_{_K}^n. \tag{14}$$

Hypothèse (RS) **:**

(i) $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $r(Q(t)) \leq 1$,

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ tel que $r(Q(t)) = 1$, les valeurs spectrales de module 1 de $Q(t)$ sont des valeurs propres de $Q(t)$.

3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in I}$ une famille d'espaces de Banach. On suppose l'existence d'un espace de Banach $\widetilde{\mathcal{B}}$ de la famille précédente tel que, pour tout $\theta \in I$, on ait $\mathcal{B}_\theta \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$. Soient $\widetilde{\mathcal{U}}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(Q(t))_{t \in \widetilde{\mathcal{U}}}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$ telle que

$$\forall t \in \widetilde{\mathcal{U}}, \ \forall \theta \in I, \quad Q(t)_{|\mathcal{B}_\theta} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta).$$

Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tau = m - \lfloor m \rfloor$. Soient T_0, T_τ, T_1 des applications de I dans $\mathbb{R}$, commutant au sens suivant : *si $\theta \in I$ et si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n \in \{T_0, T_\tau, T_1\}$ sont telles que*

$$\mathcal{T}_n \cdots \mathcal{T}_1(\theta) \in I,$$

alors, pour tout $k = 1, \ldots, n$ et toute permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$, on a :

$$\mathcal{T}_{\sigma(k)} \cdots \mathcal{T}_{\sigma(1)}(\theta) = \mathcal{T}_k \cdots \mathcal{T}_1(\theta) \in I.$$

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble dont les éléments sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ contenus dans $\widetilde{\mathcal{U}}$ tel que $\mathcal{V}$ soit stable par intersection finie.

Hypothèse $\mathcal{D}(m)$ **:**
Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $\theta \in I$ et $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$:

(0) *Pour tout $u \in \{0, \tau, 1\}$, $T_u(\theta) \in I \ \Rightarrow \ \mathcal{B}_\theta \hookrightarrow \mathcal{B}_{T_u(\theta)}$*

(1) *Pour tout $u \in \{0, \tau\}$, $T_u(\theta) \in I \ \Rightarrow \ Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^u\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T_u(\theta)})\big)$*

(2a) *Pour tout $j = 1, ..., \lfloor m \rfloor$, $T_1^j(\theta) \in I \ \Rightarrow \ Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^j\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T_1^j(\theta)})\big)$*

(2b) *Pour tout $j = 1, ..., \lfloor m \rfloor$, $T_\tau T_1^j(\theta) \in I \ \Rightarrow \ Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{j+\tau}\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T_\tau T_1^j(\theta)})\big)$*

(3) *Il existe $a \in I$ tel que $T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a) \in I$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a)}$.*

Pour tout $\theta \in I$, on désigne par Δ_θ un ensemble de parties de $\mathbb{C}$ et on suppose que l'ensemble $(\Delta_\theta)_{\theta \in I}$ est stable par intersection finie.

Hypothèse $(\mathcal{R})$ **:** *Pour tous $\theta \in I$ et $\mathcal{D} \in \Delta_\theta$, il existe un ouvert $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\theta, \mathcal{D}) \in \mathcal{V}$ tels que :*

$$\forall (z, t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}, \quad (zId - Q(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta) \text{ et } \sup_{(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}} \|(zId - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}_\theta} < +\infty.$$

Hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ **:** *Il existe une famille d'espaces de Banach $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in I}$, telle que pour tout $\theta \in I$, $\mathcal{B}_\theta$ vérifie l'hypothèse* **(B)** *et :*

(i) Q est un opérateur fortement ergodique de $\mathcal{B}_\theta$, i. e. $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$ et $\lim_{n\to+\infty} \|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}_\theta} = 0$ où $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{B}_\theta$ par :

$$\Pi f = \pi(f)1_E,$$

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires d'analyse.

Dans ce chapitre, on présente des résultats d'analyse qui seront utilisés pour établir les théorèmes de renouvellement du chapitre 2. Les rappels relatifs aux identités approchées et à la convergence vague de mesures sont classiques ainsi que ceux concernant le comportement à l'infini de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$).

Les techniques de transformées de Fourier introduites dans [4, 5] utilisent en outre, d'une part des majorations de dérivées partielles d'inverse de certaines fonctions, d'autre part des résultats sur le comportement en l'infini de la transformée de Fourier de certaines fonctions présentant une singularité en 0. Le premier point est présenté à la section 1.4 avec une preuve détaillée. Les énoncés précis du second point sont présentés dans la sous-section 1.1.2 : la preuve de la proposition 1.6 (utilisée au chapitre 2 dans le cas centré) est assez simple, en revanche les démonstrations des propositions 1.7-1.8 (utiles pour le cas décentré) sont plus difficiles car elles reposent sur des techniques assez spécifiques de découpage dyadique d'intégrales. Cette dernière partie, dont les idées principales sont présentées dans [4, 5], est complètement détaillée dans l'annexe A.

1.1 Rappels et compléments sur la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

1.1.1 Définition et propriétés usuelles.

Définition 1.1. *Soit $u \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de u est la fonction $\hat{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ par :*

$$\hat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-i\langle t,x \rangle} \, dx$$

Proposition 1.1. *Soit $u \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{u} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $\hat{u}$ est bornée par $\|u\|_1$ sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de vérifier facilement la caractérisation séquentielle de la continuité en t de $\hat{u}$. De plus, $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $|\hat{u}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\, dx$. $\square$

Proposition 1.2. *Soient f et $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)\, dx.$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\hat{f}g$ est intégrable car $\hat{f}g$ est, d'après la proposition 1.1, le produit d'une fonction intégrable et d'une fonction continue bornée. Puis, comme $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(u)e^{-i\langle x,u\rangle}|\, dudx = (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx)\,(\int_{\mathbb{R}^d} |g(u)|du) \in \mathbb{R}^+$, le théorème de Fubini-Tonelli permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\big(\int_{\mathbb{R}^d} g(u)e^{-i\langle x,u\rangle}\, du\big)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(u)\big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,u\rangle}\, dx\big)\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u)g(u)\, du
\end{aligned}$$

$\square$

Rappelons maintenant le comportement en l'infini de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$ (Théorème de Riemann-Lebesgue).

Lemme 1.1. *Soit $u \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Alors* $\displaystyle\lim_{\|t\| \to +\infty} \hat{u}(t) = 0.$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. En effectuant le changement de variable $y = x - \frac{\pi t}{\|t\|^2}$ dans $\hat{u}(t)$, on a :

$$\hat{u}(t) = -\int_{\mathbb{R}^d} u(y + \frac{\pi t}{\|t\|^2})e^{-i\langle t,y\rangle}\, dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x) - u(x + \frac{\pi t}{\|t\|^2})\big)e^{-i\langle t,x\rangle}\, dx.$$

Le résultat cherché s'obtient alors en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue ou en faisant appel à l'uniforme continuité de u car l'intégrale $\hat{u}(t)$ précédente est en fait une intégrale sur un compact de $\mathbb{R}^d$. $\square$

Proposition 1.3. *Théorème de Riemann-Lebesgue. Soit $u \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors* $\displaystyle\lim_{\|t\| \to +\infty} \hat{u}(t) = 0.$

Démonstration. Ce résultat s'obtient classiquement en utilisant le lemme 1.1 et la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Proposition 1.4. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Alors* $\displaystyle\lim_{\|t\| \to +\infty} \|t\|^k\hat{u}(t) = 0.$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. En intégrant par parties, on remarque que

$$\forall j \in \{1, \ldots, d\},\ \forall t \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = i\, t_j\, \hat{f}(t). \tag{1.1}$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_d = k$. Posons $v := \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$. En utilisant k fois (1.1), on obtient que $\hat{v}(t) = i^k t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d} \hat{u}(t)$. Comme $v \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, le lemme 1.1 implique $\lim\limits_{\|t\| \to +\infty} |t_1|^{\alpha_1} \cdots |t_d|^{\alpha_d} \hat{u}(t) = 0$ et la formule du multinôme permet de conclure car $\|t\| \leq |t_1| + \cdots + |t_d|$. □

Définition 1.2. *Fonctions uniformément höldériennes et espace $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$.*
Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, $\tau > 0$ et v une fonction de A dans $\mathbb{C}$. On définit dans $[0, +\infty]$:

$$\|v\|_{0,A} = \sup_{t \in A} |v(t)| \quad \textit{et} \quad [v]_{\tau,A} := \sup \Big\{ \frac{|v(t) - v(t')|}{\|t - t'\|^\tau},\ (t, t') \in A^2,\ t \neq t' \Big\}.$$

On dit que v est uniformément τ-höldérienne sur A si $[v]_{\tau,A} < +\infty$.
Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ est constitué des fonctions $u : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :
- *u est $\lfloor m \rfloor$ fois continûment différentiable sur $\mathcal{O}$,*
- *les dérivées partielles d'ordre $j = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor$ de u sont bornées sur $\mathcal{O}$,*
- *les dérivées partielles d'ordre $\lfloor m \rfloor$ de u sont uniformément $(m - \lfloor m \rfloor)$-höldériennes sur $\mathcal{O}$, où $\lfloor . \rfloor$ est la fonction partie entière.*

Pour $K \subset \mathcal{O}$ et $u \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$, on note :

$$\|u\|_{m,K} = \sum_{|\beta| \leq \lfloor m \rfloor} \|\partial^\beta u\|_{0,K} + \sum_{|\beta| = \lfloor m \rfloor} [\partial^\beta u]_{\tau,K}.$$

La proposition suivante précise le comportement asymptotique de la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$, à support compact.

Proposition 1.5. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soient $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\tau = m - \lfloor m \rfloor$.*
Soit $u \in \mathcal{C}_c^{\lfloor m \rfloor}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, à support compact dans $\bar{\mathcal{O}}$, telle que la restriction de u à $\mathcal{O}$ appartienne à $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$. Alors :

(i) $u \in \mathcal{C}_b^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ *tel que* $|\alpha| = \lfloor m \rfloor$, $[\partial^\alpha u]_{\tau,\mathbb{R}^d} = [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} = [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}}$.

(ii) Il existe $C > 0$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $\|a\|^m |\hat{u}(a)| \leq C\big([u]_{0,\mathcal{O}} + \sum\limits_{|\alpha| = \lfloor m \rfloor} [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}}\big)$.

Démonstration. (*i*) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = \lfloor m \rfloor$. Montrons que $[\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} = [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}}$.
Soit $(x, y) \in \bar{\mathcal{O}}^2$. Soit (x_n) (resp. (y_n)) une suite de $\mathcal{O}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ (resp. $\lim_{n \to +\infty} y_n = y$). Un passage à la limite dans l'inégalité suivante, vérifiée pour tout n,

$$|\partial^\alpha u(x_n) - \partial^\alpha u(y_n)| \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}} \|x_n - y_n\|^\tau$$

nous donne $|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}} \|x-y\|^\tau$ et donc $[\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}}$. D'où $[\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} = [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}}$ car l'inégalité $[\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}} \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}}$ est immédiate.
Montrons maintenant que $[\partial^\alpha u]_{\tau,\mathbb{R}^d} = [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}}$. Considérons $x \in \mathcal{O}$ et $y \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\mathcal{O}}$. Posons, pour tout $t \in [0,1]$, $x(t) := (1-t)x + ty$,

$$\mathcal{T}_{x,y} := \{t \in [0,1], [x, x(t)] \subset \mathcal{O}\},$$

et enfin $T := \sup \mathcal{T}_{x,y}$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, $\mathcal{T}_{x,y} = [0, T[$ et $z := x(T)$ est l'unique point de l'intersection de la frontière $\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$ de $\mathcal{O}$ avec le segment $[x, y]$. Comme $\partial^\alpha u(y) = \partial^\alpha u(z) = 0$, on a $|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| = |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(z)|$ et donc

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} \|x-z\|^\tau \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} \|x-y\|^\tau.$$

L'examen des autres cas suivant les positions respectives de x et de y conduit à la même inégalité. D'où $[\partial^\alpha u]_{\tau,\mathbb{R}^d} \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}}$ et finalement $[\partial^\alpha u]_{\tau,\mathbb{R}^d} = [\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}}$ car l'inégalité $[\partial^\alpha u]_{\tau,\bar{\mathcal{O}}} \leq [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathbb{R}^d}$ est immédiate.
(ii) Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = \lfloor m \rfloor$.
Soit $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\|a\| > \pi$. Posons $\mathcal{O}' = \mathcal{O} + B(0,1)$. En effectuant $\lfloor m \rfloor$ intégrations par parties puis le changement de variable $s = t - \frac{\pi}{\|a\|^2}\, a$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} i^{\lfloor m \rfloor} a_1^{\alpha_1} \ldots a_d^{\alpha_d} \hat{u}(a) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial^\alpha u)(t)\, e^{-i\langle t,\, a\rangle} dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} (\partial^\alpha u)(s + \frac{\pi}{\|a\|^2}\, a)\, e^{-i\langle s,\, a\rangle} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \big((\partial^\alpha u)(t) - (\partial^\alpha u)(t + \frac{\pi}{\|a\|^2}\, a)\big)\, e^{-i\langle t,\, a\rangle} dt. \end{aligned}$$

D'après (i), on a alors :

$$\begin{aligned} |a_1|^{\alpha_1} \ldots |a_d|^{\alpha_d} |\hat{u}(a)| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}'} \big|(\partial^\alpha u)(t) - (\partial^\alpha u)(t + \frac{\pi}{\|a\|^2}\, a)\big|\, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}'} dt.\ [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}} . \frac{\pi^\tau}{\|a\|^\tau}. \end{aligned}$$

La formule du multinôme et l'équivalence sur $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne et de la norme $t \mapsto |t_1| + \cdots + |t_d|$ sur $\mathbb{R}^d$ nous donnent l'existence d'une constante $D > 0$ telle que pour tout $\|a\| > \pi$, on ait :

$$\|a\|^m |\hat{u}(a)| \leq D \sum_{|\alpha| = \lfloor m \rfloor} [\partial^\alpha u]_{\tau,\mathcal{O}}.$$

De plus, si $\|a\| \leq \pi$, $\|a\|^m |\hat{u}(a)| \leq \pi^m |\hat{u}(a)| \leq \pi^m \mathcal{L}_d(\mathcal{O})\, [u]_{0,\mathcal{O}}$, car u est à support compact dans $\bar{\mathcal{O}}$. D'où (ii). □

1.1.2 Comportement en l'infini de la transformée de Fourier de certaines fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, à support compact dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

La proposition suivante est essentielle dans la preuve du théorème de renouvellement (cas centré) présentée au chapitre 2.

Soit $u : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus [-\alpha, \alpha]^d$, $u(x) = 0$.

Proposition 1.6. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que u soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et vérifie les conditions suivantes :*
- *$(i)_k$: Il existe $s < d-1$ tel que chaque dérivée partielle d'ordre $\leq k-1$ de u soit dominée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par $\|x\|^{-s}$,*
- *$(ii)_k$: chaque dérivée partielle d'ordre k de u est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors on a $\hat{u}(a) = o\big(\frac{1}{\|a\|^k}\big)$ quand $\|a\| \to +\infty$.

Cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.2. *Si u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et vérifie $(i)_1$-$(ii)_1$ alors, pour tous $a \in \mathbb{R}^d$ et $j = 1, \ldots, d$, on a : $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(a) = ia_j\, \hat{u}(a)$ et $\hat{u}(a) = o\big(\frac{1}{\|a\|}\big)$ quand $\|a\| \to +\infty$.*

Plus précisement la seconde égalité du lemme 1.2 prouve la proposition 1.6 pour $k = 1$ tandis que la première permet de prouver la proposition 1.6 par récurrence.

Démonstration du lemme 1.2. On note ici également $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{d-1}$. Remarquons que, d'après $(i)_1$, u est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Posons $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ et $a = (a_1, a') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Notons

$$u_1(x_1) = \int_{[-\alpha,\alpha]^{d-1}} u(x_1, x') e^{-i\langle a', x' \rangle}\, dx'$$

de sorte que

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{u}(a) = \int_{-\alpha}^{\alpha} u_1(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1.$$

Comme u est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et que $x' \mapsto 1_{[-\alpha,\alpha]^{d-1}}(x')\, \|x'\|^{-s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{d-1}$ (car $s < d-1$), on déduit de la condition $(i)_1$ et du théorème de convergence dominée de Lebesgue que u_1 est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, K étant un segment quelconque de $\mathbb{R}^*$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ est bornée sur le compact $K \times [-\alpha, \alpha]^{d-1}$ et le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre permet d'affirmer que u_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K, avec :

$$\forall x_1 \in K, \ \ u_1'(x_1) = \int_{[-\alpha,\alpha]^{d-1}} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') e^{-i\langle a', x' \rangle}\, dx'.$$

Remarquons que, d'après $(ii)_1$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. L'égalité précédente permet d'écrire $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}(a)$ sous la forme suivante :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \bigg(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} u_1'(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1 + \int_{\varepsilon}^{\alpha} u_1'(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1 \bigg).$$

Une intégration par parties donne, en remarquant que $u_1(\alpha) = 0$ car $u(\alpha, \cdot) = 0$:

$$\int_\varepsilon^\alpha u_1'(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1 = -e^{-ia_1\varepsilon} u_1(\varepsilon) + ia_1 \int_\varepsilon^\alpha u_1(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1.$$

En utilisant la continuité de $u_1(\cdot)$ en 0, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^\alpha u_1'(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1 \right) = -u_1(0) + ia_1 \int_{[0,\alpha]\times[-\alpha,\alpha]^{d-1}} u(x) e^{-i\langle a,x\rangle}\, dx.$$

On prouve de manière analogue que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} u_1'(x_1)\, e^{-ia_1x_1}\, dx_1 \right) = u_1(0) + ia_1 \int_{[-\alpha,0]\times[-\alpha,\alpha]^{d-1}} u(x) e^{-i\langle a,x\rangle}\, dx.$$

Ainsi $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}(a) = ia_1\hat{u}(a)$. On a évidemment de même : $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(a) = ia_j\hat{u}(a)$, $j = 2, \ldots, d$. La première assertion du lemme est donc prouvée. L'inégalité $\|a\|\, |\hat{u}(a)| \le \sum_{j=1}^d |a_j|\, |\hat{u}(a)| = \sum_{j=1}^d |\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(a)|$ et la proposition 1.3, appliquée à chaque dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, nous donnent enfin la seconde assertion du lemme. □

Les deux propositions suivantes serviront pour le cas décentré ($d \ge 2$) du chapitre 2. Du fait de cette condition de non-centrage, on introduit pour cette étude la fonction w suivante :

Définition de la fonction w.
Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $x' := (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, et on considère la fonction w définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par :

$$w(x) = -ix_1 + \|x'\|^2. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1. *Si $x_1 \neq 0$ et $x' \neq 0$, on a $\frac{1}{|w(x)|} \le \frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\|x'\|^{\frac{1}{2}}}$. La fonction $\dfrac{1}{w}$, définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, est donc intégrable en 0 d'après le théorème de Fubini-Tonelli.*

Dans les deux propositions suivantes, r désigne un réel strictement positif quelconque, et l'on considère deux fonctions θ et v de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0,r), \mathbb{C}\big)$, avec m précisé dans chacun des énoncés.

Proposition 1.7. *Soit $m = \max\left(\frac{d-1}{2}, 1\right) + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que θ est à support compact dans $B(0,r)$, que $\theta(0) = 0$, et que v vérifie les deux conditions suivantes :*

$$\forall j \in \{2, \ldots, d\}, (\partial_j v)(0) = 0, \tag{1.3}$$

$$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in B(0,r), \quad a|w(x)| \le |v(x)| \le b|w(x)|. \tag{1.4}$$

Alors la fonction $q := \dfrac{\theta}{v}\, 1_{B(0,r)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $\lim\limits_{\|a\|\to+\infty} \|a\|^{\frac{d-1}{2}} \hat{q}(a) = 0$.

Proposition 1.8. *Soit $m = \max\left(\frac{d-1}{2}, 2\right) + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que θ et v vérifient les conditions de la proposition 1.7, et en outre que toutes les dérivées partielles premières et secondes de θ sont nulles en 0. Soit $\tilde{v} \in \mathcal{C}_b^m\big(B(0,r), \mathbb{C}\big)$ vérifiant les mêmes hypothèses que v. Alors la fonction $q := \dfrac{\theta}{v\,\tilde{v}}\, 1_{B(0,r)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $\lim\limits_{\|a\|\to+\infty} \|a\|^{\frac{d-1}{2}} \hat{q}(a) = 0$.*

La démonstration des propositions 1.7-1.8 est beaucoup plus longue et technique que celle de la proposition 1.6. Elle est présentée dans [4, 5], mais avec certaines parties uniquement résumées. Pour la commodité du lecteur, on donne dans l'annexe 1 une preuve détaillée des propositions 1.7-1.8, fondée comme dans [4, 5] sur des techniques de découpage dyadique d'intégrales.

1.1.3 Transformée de Fourier (au sens des distributions) de $1/\|\cdot\|^{d-2}$, $d \geq 3$.

Dans ce paragraphe, d est un entier naturel supérieur ou égal à 3. La transformée de Fourier (au sens des distributions) de $\|\cdot\|^{-2}$ sur $\mathbb{R}^d$ est la distribution tempérée $c\|\cdot\|^{2-d}$, avec $c := (2\pi)^{\frac{d}{2}}\, 2^{\frac{d}{2}-2}\, \Gamma(\frac{d-2}{2})$ et $\Gamma(\cdot)$ la fonction Gamma d'Euler. Le but de ce paragraphe est de donner une preuve élémentaire de ce résultat classique. Il s'agit en fait de prouver l'égalité suivante (que nous appliquerons directement au chapitre 2) :

Proposition 1.9. *Soit $g \in S(\mathbb{R}^d)$. Alors :* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{g}(u)}{\|u\|^2}\, du \;=\; c \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(v)}{\|v\|^{d-2}}\, dv.$

Démonstration. La preuve proposée ici repose sur le théorème de Fubini-Tonelli, la proposition 1.2 et un calcul usuel de transformée de Fourier d'une gaussienne. Soit $g \in S(\mathbb{R}^d)$. Comme $\hat{g} \in S(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\hat{g}(\cdot)\,\|\cdot\|^{-2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. En effet, $\hat{g}(\cdot)\,\|\cdot\|^{-2}$ est intégrable sur la boule de centre 0 et de rayon 1 car $2 < d$ et sur le complémentaire de cette boule car $\hat{g}(\cdot)\,\|\cdot\|^{-2} \leq |\hat{g}|$ et $\hat{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Partons de l'égalité immédiate

$$\frac{1}{\|u\|^2} = \int_0^{+\infty} e^{-x\|u\|^2}\, dx,\ u \neq 0.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et la proposition 1.2 , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(u)\, \frac{1}{\|u\|^2}\, du = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\hat{g}(u)\, \gamma_x(u)\, du\Big)\, dx = \int_0^{+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(v)\, \widehat{\gamma_x}(v)\, dv\Big)\, dx,$$

où $\gamma_x(u) := e^{-x\|u\|^2}$ et (calcul classique) $\widehat{\gamma_x}(v) = (\frac{\pi}{x})^{\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{\|v\|^2}{4x}}$, $x > 0$. En utilisant à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli, on a aussi :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(v)\, \widehat{\gamma_x}(v)\, du\, dx = \pi^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(v) \left(\int_0^{+\infty} x^{-\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{\|v\|^2}{4x}}\, dx\right) dv.$$

Le changement de variable $y = \frac{\|v\|^2}{4x}$ donne : $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{\|v\|^2}{4x}}\, dx \;=\; 2^{d-2}\, \Gamma(\frac{d-2}{2})\, \|v\|^{-(d-2)}$. D'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{g}(u)}{\|u\|^2}\, du = \pi^{\frac{d}{2}} 2^{d-2}\, \Gamma(\frac{d-2}{2}) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(v)}{\|v\|^{d-2}}\, dv.$$

□

1.2 Convergence de mesures et transformée de Fourier.

1.2.1 Convergence vague.

Soit $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des mesures positives ν sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telles que, pour tout $a > 0$, $\nu([-a,a]^d) < +\infty$. Rappelons la définition suivante (cf. [12]) :

Définition 1.3. *Soient (μ_n) une suite de $\mathcal{M}_d$ et $\mu \in \mathcal{M}_d$. On dit que (μ_n) converge vaguement vers μ si, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\mu(x)$.*

Proposition 1.10. *Soient (μ_n) une suite de $\mathcal{M}_d$ et $\mu \in \mathcal{M}_d$. Si la suite (μ_n) converge vaguement vers μ alors, pour toute partie $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, bornée, de frontière μ- négligeable, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.*

Cette proposition étend aux mesures de $\mathcal{M}_d$ un résultat bien connu [9] lorsque les mesures μ_n et μ sont des mesures de probabilité de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ (résultat que nous admettons ici pour en déduire la proposition 1.10).

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ borné et de frontière μ- négligeable.
1^{er} *cas :* μ n'est pas la mesure nulle sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
Notons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $F_m = [-m,m]^d$ et G_m le complémentaire dans $\mathbb{R}^d$ de $]-2m,2m[^d$. Choisissons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(F_m) > 0$ et $A \subset F_m$. Considérons, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\gamma(x) := \frac{d(x,G_m)}{d(x,G_m) + d(x,F_m)}.$$

Par construction, $\gamma \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, [0,1])$, et on a $\forall x \in F_m$, $\gamma(x) = 1$, donc $\mu(\gamma) \geq \mu(F_m) > 0$. Comme $\mu(\gamma) > 0$ et $\lim_n \mu_n(\gamma) = \mu(\gamma)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\mu_n(\gamma) > 0$. Considérons alors les mesures de probabilité ν et ν_n, $n \geq N$, définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \nu(B) = \frac{\mu(1_B\gamma)}{\mu(\gamma)} \ \text{ et } \ \nu_n(B) = \frac{\mu_n(1_B\gamma)}{\mu_n(\gamma)},$$

où 1_B désigne la fonction indicatrice du borélien B de $\mathbb{R}^d$. Observons que $(\nu_n)_n$ converge vaguement vers ν. Soit ∂A la frontière de A. De $0 \leq 1_{\partial A}\,\gamma \leq 1_{\partial A}$ et $\mu(\partial A) = 0$ (par hypothèse), il vient $\nu(\partial A) = 0$ et par conséquent, $\lim_n \nu_n(1_A) = \nu(1_A)$. D'où $\lim_n \mu_n(1_A) = \mu(1_A)$ car $1_A\gamma = 1_A$ et $\lim_n \mu_n(\gamma) = \mu(\gamma)$.
$2^{ème}$ *cas* : μ est la mesure nulle sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Reprenons les notations du 1^{er} cas.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset F_m$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, [0,1])$ telle que $\forall x \in F_m$, $\gamma(x) = 1$. Comme $0 \leq 1_A \leq 1_{F_m} \leq \gamma$, on a pour tout n : $0 \leq \mu_n(1_A) \leq \mu_n(\gamma)$. Or $\lim_n \mu_n(\gamma) = \mu(\gamma) = 0$, d'où $\lim_n \mu_n(1_A) = 0 = \mu(1_A)$. □

1.2.2 Définition des espaces $\mathcal{H}_k(d)$, $k \in \mathbb{N}$, et critère de convergence faible de mesures.

Soit ν une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La transformée de Fourier $\hat{\nu}$ de ν est l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ par :

$$\hat{\nu}(t) = \nu(e^{i\langle t, \cdot \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} d\nu(x).$$

Rappelons le théorème de P. Levy :

Proposition 1.11. *Soit (ν_n) une suite de mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et ν une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Alors (ν_n) converge vaguement vers ν si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\nu_n}(t) = \hat{\nu}(t)$.*

Définition 1.4. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. $\mathcal{H}_k(d)$ (ou plus simplement $\mathcal{H}_k$) désigne l'espace des fonctions complexes h intégrables sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\hat{h} \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.*

Proposition 1.12. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. $\mathcal{H}_k(d)$ contient des fonctions strictement positives.*

Démonstration. Montrons que $\mathcal{H}_\infty(d)$ contient des fonctions strictement positives. Soient $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (non nulle), paire, et $s \in S(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{s} = \phi$. La fonction s est à valeurs réelles car, d'après la formule d'inversion de Fourier et la parité de ϕ, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $s(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t) \cos(\langle t, x \rangle)\, dt$. Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $E(x) := \exp(-\|x\|^2/2)$ et posons $\sigma := s^2 * E$. Puisque les fonctions s^2 et E sont dans $S(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$, et que s n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}^d$, σ est une fonction de $S(\mathbb{R}^d)$ strictement positive telle que $\widehat{\sigma} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ car on a :

$$\hat{\sigma} = \widehat{s^2}\widehat{E} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\hat{s} * \hat{s})\widehat{E} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\phi * \phi)\widehat{E}.$$

□

Proposition 1.13. *Soient (μ_n) une suite de $\mathcal{M}_d$ et $\mu \in \mathcal{M}_d$. Soit $h \in \mathcal{H}_0(d)$, strictement positive et μ- intégrable, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n\big(e^{i\langle t, \cdot\rangle} h\big) = \mu(e^{i\langle t, \cdot \rangle} h). \tag{1.5}$$

Alors (μ_n) converge vaguement vers μ.

Démonstration. (cf. [12]) A priori $\mu_n(h) \in [0, +\infty]$. En fait, h est μ_n-intégrable à partir d'un certain indice n car, d'après (1.5) avec $t = 0$, $\lim_n \mu_n(h) = \mu(h) \in \mathbb{R}^+$. Distinguons deux cas :

1^{er} *cas :* $\mu = 0$. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Comme $f/h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, il existe $c > 0$ tel que $|f| \leq ch$. Comme $|\mu_n(f)| \leq \mu_n(|f|) \leq c\mu_n(h)$, on a $\lim_n \mu_n(f) = 0 = \mu(f)$ car $\lim_n \mu_n(h) = \mu(h) = 0$.

2^e *cas :* $\mu \neq 0$. Comme $\mu(h) > 0$ et $\lim_n \mu_n(h) = \mu(h)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait : $\forall n \geq N$, $\mu_n(h) > 0$. Considérons alors les mesures de probabilité ν et ν_n, $n \geq N$, définies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ par :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \nu(A) = \frac{\mu(1_A h)}{\mu(h)} \text{ et } \nu_n(A) = \frac{\mu_n(1_A h)}{\mu_n(h)}$$

où 1_A désigne la fonction indicatrice du borélien A de $\mathbb{R}^d$. D'après (1.5), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ \lim_n \widehat{\nu_n}(t) := \lim_n \frac{\mu_n(e^{it\cdot}h)}{\mu_n(h)} = \frac{\mu(e^{it\cdot}h)}{\mu(h)} := \hat{\nu}(t).$$

La suite (ν_n) converge donc vaguement vers ν par le théorème de P. Levy (cf. Proposition 1.11). Considérons maintenant $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et posons $g := f/h$. Comme $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_n(f)}{\mu_n(h)} := \lim_{n\to+\infty} \nu_n(g) = \nu(g) := \frac{\mu(f)}{\mu(h)}.$$

Or $\lim\limits_n \mu_n(h) = \mu(h)$. D'où $\lim_n \mu_n(f) = \mu(f)$. □

Remarque 1.2. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a $\mathcal{H}_k(d) \subset \mathcal{H}_0(d)$, et pour $t \in \mathbb{R}^d$, on a l'implication suivante : $h \in \mathcal{H}_k(d) \Rightarrow e^{i\langle t,\cdot\rangle}h \in \mathcal{H}_k(d)$. Comme il existe des fonctions strictement positives dans $\mathcal{H}_k(d)$ (Prop. 1.12), on en déduit le résultat suivant : une condition sufffisante pour qu'une suite (μ_n) de $\mathcal{M}_d$ converge vaguement vers $\mu \in \mathcal{M}_d$ est que :*

$$\forall h \in \mathcal{H}_k(d),\ \lim_{n\to+\infty} \mu_n(h) = \mu(h).$$

1.3 Un résultat d'identité approché.

Pour tous $F \in S(\mathbb{R}^d)$, $\beta > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on note $F_\beta(x) = \beta^d F(\beta x)$. Pour $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, posons $f_{d-2}(w) := \|w\|^{2-d}$. Alors :

Proposition 1.14. $\lim\limits_{\beta\to+\infty} (F_\beta * f_{d-2})(\tilde{b}) = \int_{\mathbb{R}^d} F(w)dw$ *uniformément en $\tilde{b}$ tel que $\|\tilde{b}\| = 1$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'application $(u, v) \mapsto f_{d-2}(u - v)$ est uniformément continue sur le compact $\{(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : \|u\| = 1, \|v\| \le \frac{1}{2}\}$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe donc $0 < \eta = \eta(\varepsilon) < \frac{1}{2}$ tel que, pour tous $\|\tilde{b}\| = 1$ et $\|w\| < \eta$, on ait $\left|f_{d-2}(\tilde{b} - w) - 1\right| \le \varepsilon$. Or, pour tout $\beta > 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} F_\beta(w)dw = \int_{\mathbb{R}^d} F(w)dw$, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} F(w)dw - (F_\beta * f_{d-2})(\tilde{b}) \right| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |F_\beta(w)| \left|1 - f_{d-2}(\tilde{b} - w)\right| dw \\ &= \int_{\|w\|<\eta} + \int_{\|w\|\ge\eta} := A_{\eta,\tilde{b}}(\beta) + B_{\eta,\tilde{b}}(\beta). \end{aligned}$$

D'une part, pour tout $\beta > 0$, on a $A_{\eta,\tilde{b}}(\beta) \le \varepsilon \int |F(w)|dw$. D'autre part, comme $F \in S(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante $D > 0$ telle que $|F(\cdot)| \le \frac{D}{(1+\|\cdot\|)^{d+1}}$ et ainsi $B_{\eta,\tilde{b}}(\beta) \le B'_\eta(\beta) + B''_{\eta,\tilde{b}}(\beta)$ avec $B'_\eta(\beta) = \int_{\|w\|\ge\eta} |F_\beta(w)|\, dw$ et

$$B''_{\eta,\tilde{b}}(\beta) = \int_{\|w\|\ge\eta} \left(\frac{D\,\beta^d}{\beta^{d+1}\|w\|^{d+1}}\right) \left(\frac{1}{\|\tilde{b} - w\|^{d-2}}\right) dw = \frac{D}{\beta} \int_{\|w\|\ge\eta} \frac{dw}{\|w\|^{d+1}\, \|\tilde{b} - w\|^{d-2}}.$$

Comme F est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, le théorème de convergence dominée nous donne l'existence de $\beta'(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\beta \geq \beta'(\varepsilon)$, $B'_\eta(\beta) = \int_{\|y\| \geq \eta\beta} |F(y)| dy \leq \varepsilon$. Décomposons maintenant $B''_{\eta,\tilde{b}}(\beta)$ en remarquant que si $\|\tilde{b} - w\| > 2$ alors $\|w\| > 1$. On obtient que

$$B''_{\eta,\tilde{b}}(\beta) \leq \frac{D}{\beta}\left(\frac{1}{\eta^{d+1}} \int_{\{\|y\| \leq 2\}} \frac{dy}{\|y\|^{d-2}} + \frac{1}{2^{d-2}} \int_{\{\|w\| > 1\}} \frac{dw}{\|w\|^{d+1}}\right).$$

Comme les deux précédentes intégrales sont finies, il existe $\beta''(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\beta \geq \beta''(\varepsilon)$, on ait $B''_{\eta,\tilde{b}}(\beta) \leq \varepsilon$, pour tout $\|\tilde{b}\| = 1$. Finalement, pour tout $\beta \geq \max(\beta'(\varepsilon), \beta''(\varepsilon))$, on a pour tout $\|\tilde{b}\| = 1$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} F(w) dw - (F_\beta * f_{d-2})(\tilde{b}) \right| \quad \leq \quad (\int |F(w)| dw + 2)\varepsilon.$$

$\square$

1.4 Majorations de dérivées partielles d'inverse de certaines fonctions.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d$. On pose $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_d$, $\gamma! = \gamma_1! \ldots \gamma_d!$ et si $\beta \in \mathbb{N}^d$ est tel que $\beta \leq \gamma$, c'est-à-dire si $\beta_i \leq \gamma_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on pose $\binom{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma!}{\beta!(\gamma-\beta)!}$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes m-fois continûment différentiables sur Ω.

Pour $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leq m$, on note ∂^γ l'opérateur défini sur $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{C})$ par :

$$\partial^\gamma := \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_d^{\gamma_d}} = \partial_1^{\gamma_1} \ldots \partial_d^{\gamma_d} \quad \text{où} \quad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Rappelons (formule de Leibniz) que si f, $g \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{C})$ alors, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leq m$, on a

$$\partial^\gamma(f.\, g) = \sum_{\beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^{\gamma-\beta} f \,.\, \partial^\beta g.$$

Soient V un voisinage borné de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et W un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $\overline{V}$.

Proposition 1.15. *Supposons que $w : W \to \mathbb{C}$ soit m-fois continûment différentiable et qu'il existe $a > 0$ et $b \geq 0$ telles que pour tout $x \in V$, on ait :*

$$|w(x)| \geq a\,\|x\|^2 \quad et \quad \sum_{j=1}^{d} |(\partial_j w)(x)| \leq b\,\|x\|.$$

Alors, pour chaque $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leq m$, il existe $C_\gamma \geq 0$ telle que

$$\forall x \in V \setminus \{0\}, \quad \left|\partial^\gamma(\frac{1}{w})(x)\right| \leq \frac{C_\gamma}{\|x\|^{2+|\gamma|}}. \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leq m$. Notons $M_\gamma = \max_{x \in \overline{V}} |\partial^\gamma w(x)|$. Soit $K > 0$ tel que $\|x\| \leq K$ pour tout $x \in V$. Nous allons prouver (1.6) en raisonnant par récurrrence sur $\ell = |\gamma| \in \{0, \ldots, m\}$. Tout d'abord, (1.6) est évidente pour $\ell = 0$ et si $\ell = 1$, (1.6) s'obtient en utilisant les égalités :

$$\forall j \in \{1, \ldots, d\},\ \forall x \in V \setminus \{0\}, \quad \partial_j(\frac{1}{w})(x) = -\frac{\partial_j w(x)}{w^2(x)}.$$

Considérons maintenant $\ell \in \{1, \ldots, m-1\}$ et supposons (1.6) vérifiée pour chaque $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \leq \ell$. Soit $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| = \ell + 1$. Comme $\partial^\gamma(w\,.w^{-1}) = 0$, la formule de Leibniz nous donne sur $V \setminus \{0\}$:

$$\partial^\gamma(\frac{1}{w}) = -\frac{1}{w} \sum_{\beta \leq \gamma,\, \beta \neq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^{\gamma-\beta} w.\, \partial^\beta(\frac{1}{w}).$$

Soient $\beta \leq \gamma$ tel que $|\gamma| - |\beta| \geq 2$ et $x \in V \setminus \{0\}$. On a :

$$\Big|\frac{1}{w(x)} \partial^{\gamma-\beta} w(x) \partial^\beta(\frac{1}{w})(x)\Big| \ \leq \ \frac{M_{\gamma-\beta} C_\beta}{a\,\|x\|^{4+|\beta|}} \ \leq \ \frac{K^{|\gamma|-|\beta|-2} M_{\gamma-\beta} C_\beta}{a\,\|x\|^{2+|\gamma|}}.$$

Soient $\beta \leq \gamma$ tel que $|\gamma| - |\beta| = 1$ et $x \in V \setminus \{0\}$. On a :

$$\Big|\frac{1}{w(x)} \partial^{\gamma-\beta} w(x) \partial^\beta(\frac{1}{w})(x)\Big| \ \leq \ \frac{b\, C_\beta}{a\,\|x\|^{3+|\beta|}} \ = \ \frac{b\, C_\beta}{a\,\|x\|^{2+|\gamma|}}.$$

D'où (1.6) pour $|\partial^\gamma(\frac{1}{w})|$. $\square$

Chapitre 2

Théorèmes de renouvellement dans un cadre général

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $((X_n, S_n))_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$. Étant donnée une fonction mesurable $f : E \to [0, +\infty[$, on présente dans ce chapitre des conditions sur les fonctions (de type) caractéristiques

$$E_n(t) := \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big],\ t \in \mathbb{R}^d$$

sous lesquelles on peut appliquer les techniques de transformées de Fourier de Breiman-Babillot [12, 4] (cf. l'introduction), et donc déduire les théorèmes de renouvellement, plus précisément les propriétés (2), (3) et (4) de l'introduction, en termes de convergence vague de mesures. Ces propriétés sont (respectivement) relatives au trois cas suivants :

1. $d = 1$ et $\mathbb{E}[S_1] \neq 0$ (cas décentré),
2. $d \geq 3$ et $\mathbb{E}[S_1] = 0$ (cas centré),
3. $d \geq 2$ et $\mathbb{E}[S_1] \neq 0$ (cas décentré).

Les conditions sur $E_n(t)$ sont regroupées dans une hypothèse appelée $\mathcal{R}_d(m)$ faisant intervenir un paramètre de régularité $m > 0$. Les propriétés (2), (3) et (4) sont établies respectivement sous l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d + \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $m_1 = 1$ dans le cas 1., $m_d := \max(d-2, 2)$ dans le cas 2. et enfin $m_d := \max(\frac{d-1}{2}, 2)$ dans le cas 3.. On notera que la valeur m_d correspond à l'ordre dans la condition de moment du cas indépendant (voir l'introduction). Un raffinement dans le cas $d = 1$ est présenté dans la sous-section 2.2.5. L'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ de la section suivante privilégie le cas "non-lattice" (en un sens qui sera précisé dans la remarque 2.2). Les extensions au cas "lattice" sont présentées dans la dernière section de ce chapitre.

Les techniques utilisées dans ce chapitre sont très proches de celles introduites dans [12, 4]. Cependant, en dimension $d \geq 2$, on a simplifié certains passages en remplaçant en particulier des arguments de distributions et le recours aux fonctions de Bessel généralisées par des calculs élémentaires.

2.1 Hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{R}^{+*}$.

Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{R}^{+*}$. Rappelons que, $\mathcal{O}$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $U : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ si U est $\lfloor m \rfloor$-fois continûment différentiable sur $\mathcal{O}$, si les dérivées partielles d'ordre $j = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor$ de U sont bornées sur $\mathcal{O}$, et si enfin les dérivées partielles d'ordre $\lfloor m \rfloor$ de U sont uniformément $(m - \lfloor m \rfloor)$-höldériennes sur $\mathcal{O}$.

Pour tous $R > 0$ et tous $0 < r < r'$, on définit la boule $B(0, R) := \{t \in \mathbb{R}^d : \|t\| < R\}$ et la couronne $K_{r,r'} = \{t \in \mathbb{R}^d : r < \|t\| < r'\}$. On note $\mathcal{L}_d(\cdot)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $((X_n, S_n))_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires (v.a.) définies sur Ω et à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$. On identifie désormais S_n à la matrice ligne

$$S_n := \big(S_{n,1} \ldots S_{n,d}\big)\,,$$

et S_n^* désigne la matrice colonne transposée de S_n.

Dans l'hypothèse suivante, $f : E \to [0, +\infty[$ est une fonction mesurable *fixée* telle que

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}[f(X_n)] < +\infty. \tag{2.1}$$

Hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$. *Les deux conditions suivantes sont supposées satisfaites :*

(i) Il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in B(0, R)$ et tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}\big] = \lambda(t)^n\, L(t) + R_n(t) \tag{2.2}$$

où $\lambda(0) = 1$, $\lambda(\cdot)$ et $L(\cdot)$ sont des fonctions de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0, R), \mathbb{C}\big)$ et $\sum_{n\geq 1} R_n(\cdot)$ converge uniformément dans $B(0, R)$ vers une fonction de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0, R), \mathbb{C}\big)$.

(ii) Pour tous $0 < r < r'$, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$ converge uniformément dans $K_{r,r'}$ vers une fonction de $\mathcal{C}_b^m\big(K_{r,r'}, \mathbb{C}\big)$.

Sous l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$, on définit :

$$\vec{m} := -i(\nabla\lambda)(0) \ \text{ si } m \geq 1, \quad \text{et} \quad \Sigma := -(Hess\, \lambda)(0) \ \text{ si } m \geq 2, \tag{2.3}$$

où ∇ et $Hess$ désignent respectivement le gradient et la matrice hessienne.

Proposition 2.1.

(i) Si l'hypothèse $\mathcal{R}_d(1)(i)$ est satisfaite avec $f = 1_E$, $L(0) = 1$, $\sup_{n\geq 1} |R_n^{(1)}(0)| < +\infty$, et si $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}[\|S_n\|] < +\infty$, alors $\vec{m} = \lim_n \dfrac{1}{n}\, \mathbb{E}[S_n] := \lim_n \dfrac{1}{n}\big(\mathbb{E}[S_{n,1}], \ldots, \mathbb{E}[S_{n,d}]\big)$.

(ii) Si l'hypothèse $\mathcal{R}_d(2)(i)$ est satisfaite avec $f = 1_E$, $L(0) = 1$, $\sup_{n\geq 1} |R_n^{(2)}(0)| < +\infty$, si en outre $(\nabla\lambda)(0) = 0$ et $\forall n \geq 1$, $\mathbb{E}[\|S_n\|^2] < +\infty$, alors $\Sigma = \lim_n \dfrac{1}{n}\, \mathbb{E}[S_n^* S_n]$.

Démonstration. Nous pouvons supposer $d = 1$, sans perte de généralité, car le cas $d \geq 2$ se traite de même en dérivant partiellement. En dérivant l'égalité $\mathbb{E}[e^{itS_n}] = \lambda(t)^n\, L(t) + R_n(t)$

en $t = 0$, on obtient : $i\,\mathbb{E}[S_n] = n\,\lambda'(0) + L'(0) + R_n'(0)$, donc $\lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}[S_n] = \lambda'(0)$. Puis en dérivant deux fois la même égalité en $t = 0$, on obtient $-\,\mathbb{E}[S_n^2] = n\,\lambda''(0) + L''(0) + R_n''(0)$, donc $\lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}[S_n^2] = -\lambda''(0)$. $\square$

La proposition précédente montre que, sous des conditions qui seront satisfaites par la suite, $\vec{m}$ (resp. Σ) s'interprète comme une moyenne (resp. une variance) asymptotique. En particulier notons que, sous l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$, la condition $\sup_{n\geq 1}|R_n^{(\ell)}(0)| < \infty$ est satisfaite en général pour $0 \leq \ell \leq m$ en vu d'obtenir la régularité sur $\sum_{n\geq 1} R_n(\cdot)$.

Nous terminons ce paragraphe par l'énoncé d'une formule simple, mais importante pour la suite. Rappelons que $h \in \mathcal{H}_0$ si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est Lebesgue-intégrable et $\hat{h} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.

Proposition 2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : E \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}[f(X_n)] < +\infty$. Soit $h \in \mathcal{H}_0$, et soit $b > 0$ tel que $\hat{h}(t) = 0$ pour tout $\|t\| > b$. Alors on a*

$$\mathbb{E}\big[f(X_n)\,h(S_n)\big] = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\|t\|\leq b} \hat{h}(t)\,\mathbb{E}\big[f(X_n)\,e^{i\langle t,S_n\rangle}\big]\,dt.$$

Démonstration. En utilisant la formule d'inversion de Fourier avec h, puis le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f(X_n)\,h(S_n)\big] &= \int_\Omega f(X_n(\omega))\Big(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\|t\|\leq b}\hat{h}(t)e^{i\langle\, t,S_n(\omega)\,\rangle}\,dt\Big)\,d\mathbb{P}(\omega)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\|t\|\leq b}\hat{h}(t)\,\mathbb{E}\big[f(X_n)\,e^{i\langle t,S_n\rangle}\big]\,dt.\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.1. *Cas indépendant : $(X_n)_{n\geq 0}$ est i.i.d., $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et $f = 1_E$.*
La convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}[e^{i\langle\cdot,S_n\rangle}]$ dans la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ est ici reliée à l'hypothèse usuelle dite non-lattice : X_1 n'est pas à valeurs dans un sous-groupe fermé propre de $\mathbb{R}^d$. Les propriétés de régularité dans l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ sont assurées sous la condition de moment $\mathbb{E}[\|X_1\|^m] < +\infty$.

Remarque 2.2. *Dans le cadre général de l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ (avec $f = 1_E$ pour simplifier), la convergence de la série $\mathcal{E}(t) := \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}[e^{i\langle t,S_n\rangle}]$ pour $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est également reliée à une hypothèse de type non-lattice. Pour le voir, plaçons-nous au contraire dans une situation "lattice", à savoir supposons que les v.a. S_n prennent leurs valeurs dans un sous-groupe fermé propre $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathbb{S}^*$ le groupe dual de $\mathbb{S}$ défini par :*

$$\mathbb{S}^* := \{t \in \mathbb{R}^d\ :\ \forall s \in \mathbb{S},\ \langle t, s\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Alors la fonction $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ est (formellement) $\mathbb{S}^*$-périodique, et comme $\mathcal{E}(0)$ n'est pas défini, $\mathcal{E}(t)$ ne peut l'être non plus pour $t \in \mathbb{S}^*$, et en conséquence, la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ ne peut pas être satisfaite. Cependant, à condition d'adapter la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ au groupe $\mathbb{S}$, les théorèmes de renouvellement des sections suivantes subsistent, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ étant alors remplacée par la mesure de Haar sur $\mathbb{S}$ (à une constante multiplicative près), voir la section 2.5.

2.2 Un théorème de renouvellement uni-dimensionnel.

Le résultat ci-dessous est une extension naturelle du cas i.i.d. traité dans [12]. Les arguments utilisés sont inspirés de [12], et d'extensions obtenues pour les chaînes de Markov (voir par exemple [34, 41]). Rappelons que $\mathcal{M}_1$ désigne l'ensemble des mesures positives μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que, pour tout segment K de $\mathbb{R}$, on ait $\mu(K) < +\infty$.

2.2.1 Enoncé du théorème de renouvellement.

Théorème 2.1. *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$ soit vérifiée avec $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable vérifiant (2.1), et que l'on ait de plus : $\lambda'(0) = iv_0$, avec $v_0 \in]0, +\infty[$, $L(0) \neq 0$ et*

$$\int_{-R}^{R} \frac{|\lambda(t) - 1 - iv_0 t|}{t^2}\, dt < +\infty, \tag{2.4}$$

avec $R > 0$ donné dans la condition $\mathcal{R}_1(1)(i)$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour toute partie borélienne bornée B de $\mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)\, 1_B(S_n)]$ converge, et la mesure positive U_f définie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$U_f \;:\; B \mapsto U_f(B) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)\, 1_B(S_n)]$$

appartient à $\mathcal{M}_1$.

(ii) La famille $(U_f(\cdot + a))_{a\in\mathbb{R}}$ de mesures positives de $\mathcal{M}_1$ converge vaguement vers 0 quand $a \to -\infty$, et vers $\frac{L(0)}{v_0}\, \mathcal{L}_1(\cdot)$ quand $a \to +\infty$.

Si $a \in \mathbb{R}$ et u est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$u_a(x) := u(x - a), \; x \in \mathbb{R}.$$

Si $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $g_a \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et la propriété (ii) signifie (cf. Chap. 1) que

$$U_f(g_a) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)\, g(S_n - a)]$$

converge vers 0 quand $a \to -\infty$, et vers $\frac{L(0)}{v_0} \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$ quand $a \to +\infty$. Cette propriété est également vérifiée lorsque $g = 1_B$, pour toute partie borélienne bornée B de $\mathbb{R}$ de frontière Lebesgue-négligeable d'après la proposition 1.10.

Corollaire 2.1. *Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Supposons que l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1+\varepsilon)$ soit satisfaite avec $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable vérifiant (2.1), et avec $\lambda'(0) = iv_0$, $v_0 \in]0, +\infty[$, et $L(0) \neq 0$. Alors les propriétés (i) et (ii) du théorème 2.1 sont vérifiées.*

Démonstration. Il suffit de prouver (2.4). Posons $\beta(t) := \lambda(t) - 1 - iv_0 t$, $t \in]-R, R[$. D'après l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1+\varepsilon)$, $\beta \in C_b^{1+\varepsilon}(]-R, R[, \mathbb{C})$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\forall s \in]-R, R[,\ |\beta'(s)| = |\lambda'(s) - \lambda'(0)| \leq C|s|^{\varepsilon}.$$

Donc ona :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad |\beta(t)| = |\beta(t) - \beta(0)| \leq \Big| \int_0^t |\beta'(s)|\, ds \Big| \leq \frac{C}{1+\varepsilon}|t|^{1+\varepsilon}.$$

On en déduit l'inégalité suivante : $\forall t \in]-R, R[\setminus\{0\}$, $\frac{|\lambda(t)-1-iv_0t|}{t^2} \leq \frac{C}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{|t|^{1-\varepsilon}}$. D'où (2.4) car $t \mapsto \frac{1}{|t|^{1-\varepsilon}}$ est intégrable en 0. □

2.2.2 Preuve du théorème 2.1.

Rappelons que l'espace $\mathcal{H}_k(1)$, noté ici simplement $\mathcal{H}_k$, désigne l'espace des fonctions complexes h intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que $\hat{h} \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, voir le paragraphe 1.2.2. Dans cette partie consacrée à la dimension 1, nous utiliserons ces espaces avec $k = 0$ ou 1.

Le théorème 2.1 va résulter du théorème ci-dessous. Soit $k_0 \in \mathcal{H}_1$ strictement positive (cf. Prop. 1.12).

Théorème 2.2. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 soient satisfaites. Alors, pour toute fonction $h := e^{iu\cdot}k_0$ $(u \in \mathbb{R})$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $U_f(h_a) := \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)\, h_a(S_n)]$ converge, et l'on a*

$$\lim_{a\to-\infty} U_f(h_a) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{a\to+\infty} U_f(h_a) = \frac{L(0)\widehat{h}(0)}{v_0}. \tag{2.5}$$

Le théorème 2.2 est démontré dans les paragraphes suivants. Nous l'admettons donc ici provisoirement pour en déduire le théorème 2.1 :

Démonstration du théorème 2.1. Si $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (ou si $g = 1_B$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bornée), alors il existe $C > 0$ tel que $|g| \leq Ck_0$. Comme $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)\, k_0(S_n)] < +\infty$ d'après le théorème 2.2, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)g(S_n)]$ converge absolument. Le fait que l'application $U_f : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ soit σ-additive est bien connu : en effet, si $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de boréliens disjoints de $\mathbb{R}$, alors on a par convergence monotone et par un résultat classique sur les séries doubles à termes positifs :

$$U_f\big(\sqcup_p B_p\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\Big[f(X_n) \sum_{p=1}^{+\infty} 1_{B_p}(S_n)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[f(X_n)1_{B_p}(S_n)\big] = \sum_{p=1}^{+\infty} U_f(B_p).$$

Ce qui précède démontre l'assertion (i) du théorème 2.1. L'assertion (ii) est une conséquence directe de (2.5) d'après la proposition 1.13 du chapitre 1. □

2.2.3 Preuve du théorème 2.2.

Dans ce paragraphe, nous supposons vérifiées les hypothèses du théorème 2.1. Pour établir le théorème 2.2, nous avons besoin de quelques résultats complémentaires portant sur les fonctions introduites dans l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$:

Lemme 2.1. *On a $\lambda(t) = 1 + iv_0t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, et il existe $\alpha \in]0, R[$ tel que l'on ait pour tout $0 < |t| \leq \alpha$:*

$$L(t) \neq 0, \quad |\varepsilon(t)| \leq \frac{v_0}{4}, \quad et \quad |\lambda(t)| < 1. \tag{2.6}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E_n(t) := \mathbb{E}[f(X_n)\, e^{itS_n}].$$

Démonstration. La première assertion est immédiate puisque, par hypothèse, $\lambda(\cdot)$ est dérivable en 0 avec $\lambda'(0) = iv_0 \in i\,\mathbb{R}^{+*}$. L'existence de $\alpha < R$ donnant les propriétés souhaitées pour $L(\cdot)$ et $\varepsilon(\cdot)$ sont évidente (rappelons que $L(0) \neq 0$ et L est continue en 0). Enfin, grâce aux conditions $\mathcal{R}_1(1)$(i)-(ii), la série $\sum_{n\geq 1} \lambda^n(t)L(t)$ converge pour tout $0 < |t| \leq \alpha$. Comme $L(t) \neq 0$, il vient que $|\lambda(t)| < 1$. □

Désormais $\alpha \in]0, R[$ est fixé comme indiqué au lemme 2.1, et nous posons

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha],\ \mathcal{R}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(t) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathcal{E}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t). \tag{2.7}$$

D'après l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$, les fonctions $\mathcal{R}(\cdot)$ et $\mathcal{E}(\cdot)$ sont continues sur respectivement $[-\alpha, \alpha]$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

Lemme 2.2. *Soit $r \in [0, 1]$. Pour tout $|t| \leq \alpha$, la série $\mathcal{R}_r(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}R_n(t)$ converge, et $\lim_{r\to 1} \mathcal{R}_r(t) = \mathcal{R}(t)$ uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$. De même, si $b > \alpha$, alors pour tout $t \in K := [-b, -\alpha] \cup [\alpha, b]$, la série $\mathcal{E}_r(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}E_n(t)$ converge, et $\lim_{r\to 1} \mathcal{E}_r(t) = \mathcal{E}(t)$ uniformément sur K.*

Démonstration. Démontrons la première affirmation du lemme, la seconde se prouvant par un raisonnement analogue. Notons $s_{n,r}(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} r^{k-1}R_k(t)$ et $\sigma_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k(t)$, $|t| \leq \alpha$. Une transformation d'Abel donne :

$$s_{n,r}(t) = -r^n\sigma_n(t) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r^k - r^{k-1})\sigma_k(t).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n\geq 1} R_n(\cdot)$ est, d'après l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$, une série de fonctions continues uniformément convergente sur $[-\alpha, \alpha]$, il existe $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $|\sigma_n(t)| \leq \varepsilon$. D'autre part : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |r^k - r^{k-1}| \leq 1$. Donc

$$\forall n \geq N,\ \forall t \in [-\alpha, \alpha],\ \forall r \in [0, 1], \quad |s_{n,r}(t)| \leq 2\varepsilon.$$

Il vient que $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $\forall r \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_r(t) - \mathcal{R}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{N} (1 - r^{n-1}) |R_n(t)| + |s_{N,r}(t) - \sigma_N(t)| \\
&\leq N(1 - r^{N-1}) \max_{n=1,\ldots,N} \max_{t \in [-\alpha,\alpha]} |R_n(t)| + 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Il existe donc $r_0 \in [0,1[$ tel que $\forall r \in [r_0, 1[$, $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $|\mathcal{R}_r(t) - \mathcal{R}(t)| \leq 4\varepsilon$. □

La proposition ci-dessous permet de définir l'expression suivante pour $h \in \mathcal{H}_0$ et $r \in [0,1[$:

$$U_{f,r}(h) := \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \mathbb{E}\big[f(X_n)\, h(S_n)\big]. \tag{2.8}$$

Proposition 2.3. *Soit $h \in \mathcal{H}_0$ et $r \in [0,1[$. Alors la série dans (2.8) est convergente. En outre, soit $b > \alpha$ tel que, pour tout $|t| > b$, on ait $\hat{h}(t) = 0$. Alors on a, avec $\mathcal{R}_r(t)$ et $\mathcal{E}_r(t)$ définis au lemme 2.2 :*

$$2\pi\, U_{f,r}(h) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\lambda(t)\hat{h}(t)L(t)}{1 - r\lambda(t)}\, dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)\mathcal{R}_r(t)\, dt + \int_{\alpha \leq |t| \leq b} \hat{h}(t)\mathcal{E}_r(t)\, dt. \tag{2.9}$$

Démonstration. Par convergence dominée, chaque fonction $E_n(\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$(i), on a : $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $E_n(t) = \lambda(t)^n L(t) + R_n(t)$. De la proposition 2.2 et de l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$, il vient que

$$\mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n)] = \frac{1}{2\pi}\bigg(\int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)\lambda(t)^n\, L(t)\, dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)R_n(t)\, dt + \int_{\alpha \leq |t| \leq b} \hat{h}(t)E_n(t)\, dt\bigg).$$

Pour $|t| \leq \alpha$, on a $|\lambda(t)| \leq 1$ (Lemme 2.1), donc la série $\sum_{n\geq 1} r^{n-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda^n(t)\hat{h}(t)L(t)\, dt$ converge pour $r \in [0,1[$. Par convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} r^{n-1}\hat{h}(t)\lambda^n(t)L(t)$ sur $[-\alpha, \alpha]$, on a, par intégration terme à terme sur $[-\alpha, \alpha]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)\lambda^n(t)L(t)\, dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\lambda(t)\hat{h}(t)L(t)}{1 - r\lambda(t)}\, dt. \tag{2.10}$$

D'après l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)\,(i)$, chaque fonction $R_n(\cdot)$ est continue sur $[-\alpha, \alpha]$ et la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$ vers la fonction nulle. Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $|R_n(t)| \leq C$. La série $\sum_{n\geq 1} r^{n-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)R_n(t)dt$ converge donc et, par convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} r^{n-1}\hat{h}(t)R_n(t)$ sur $[-\alpha, \alpha]$, on a, par intégration terme à terme sur $[-\alpha, \alpha]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)R_n(t)\, dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} R_n(t)\, dt. \tag{2.11}$$

D'après l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)\,(ii)$, les arguments précédents s'appliquent exactement de la même façon aux fonctions $E_n(\cdot)$ sur $[-b, -\alpha] \cup [\alpha, b]$ (à la place de $R_n(\cdot)$ sur $[-\alpha, \alpha]$). D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \int_{\alpha \leq |t| \leq b} \hat{h}(t)E_n(t)\, dt = \int_{\alpha \leq |t| \leq b} \hat{h}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} E_n(t)\, dt. \tag{2.12}$$

La convergence de la série $\sum_{n\geq 1} r^{n-1}\mathbb{E}[f(X_n)\,h(S_n)]$, ainsi que la formule (2.9), résultent donc de (2.10), (2.11) et (2.12). $\square$

Les deux propositions suivantes vont préciser, lorsque $h \in \mathcal{H}_1$, le comportement quand $r \nearrow 1$ des trois intégrales intervenant dans (2.9). Notons pour simplifier :

$$V_{f,r}(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\lambda(t)\hat{h}(t)L(t)}{1 - r\lambda(t)}\,dt. \tag{2.13}$$

Rappelons qu'on note $h_a := h(\cdot - a)$ $(a \in \mathbb{R})$. On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{h_a}(t) = e^{-ita}\hat{h}(t)$. Notons que, si $h \in \mathcal{H}_1$, alors $h_a \in \mathcal{H}_1$ et $\widehat{h_a}$ a le même support que $\hat{h}$.

Proposition 2.4. *Soit $h \in \mathcal{H}_0$ quelconque. Soit $b > \alpha$ tel que supp$(\hat{h}) \subset [-b, b]$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$, avec $\mathcal{R}(t)$ et $\mathcal{E}(t)$ définis dans (2.7) :*

$$\lim_{r\to 1}[U_{f,r}(h_a) - V_{f,r}(h_a)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)\mathcal{R}(t)\,e^{-ita}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha\leq|t|\leq b} \hat{h}(t)\mathcal{E}(t)\,e^{-ita}\,dt.$$

Démonstration. La convergence ci-dessus résulte directement de (2.9) et du lemme 2.2. $\square$

Proposition 2.5. *Soit $h \in \mathcal{H}_1$. Alors la fonction $\chi : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)L(t)\,\hat{h}(t)}{1-\lambda(t)} - \dfrac{iL(0)\hat{h}(0)}{v_0 t}$ est intégrable sur $[-\alpha, \alpha]$, et l'on a pour $a \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{r\to 1^-} 2\pi V_{f,r}(h_a) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \chi(t)\,e^{-ita}\,dt \;+\; \frac{L(0)\hat{h}(0)}{v_0}\left(\pi + \int_{-\alpha a}^{\alpha a} \frac{\sin t}{t}dt\right).$$

La preuve de la proposition 2.5 n'est pas immédiate, elle est reportée au paragraphe suivant. Admettons provisoirement la proposition 2.5 et démontrons le théorème 2.2.

Preuve du théorème 2.2. Remarquons tout d'abord que, si $k \in \mathcal{H}_1$ est positive, alors

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)k(S_n)] < +\infty. \tag{2.14}$$

En effet, soit $a_n := \mathbb{E}[f(X_n)k(S_n)]|$. D'après la proposition 2.3, on a pour tout $r \in [0,1[$: $U_{f,r}(k) = \sum_{n\geq 1} r^{n-1}a_n < +\infty$. Par convergence monotone on a : $\lim_{r\to 1} U_{f,r}(k) = \sum_{n\geq 1} a_n$ (dans $[0, +\infty]$), et par ailleurs les propositions 2.4-2.5 (appliquées avec $h = k$ et $a = 0$) montrent que $\lim_{r\to 1} U_{f,r}(k) \in \mathbb{R}$. D'où (2.14).

Rappelons que la fonction k_0 du théorème 2.2 est strictement positive et dans $\mathcal{H}_1$. Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé arbitrairement, et soit $h := e^{iu\cdot}k_0$. Comme $|h_a| \leq k_0(\cdot - a)$, la propriété (2.14) (appliquée avec $k = k_0(\cdot - a)$) montre que la série de fonctions $U_{f,r}(h_a) = \sum_{n\geq 1} r^{n-1}\mathbb{E}[f(X_n)h_a(S_n)]$ converge normalement sur $[0, 1]$. D'où, par continuité à gauche en $r = 1$:

$$U_f(h_a) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)h_a(S_n)] = \lim_{r\to 1^-} U_{f,r}(h_a).$$

Comme $h \in \mathcal{H}_1$, l'égalité précédente et les propositions 2.4-2.5 montrent que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)h_a(S_n)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \chi(t)\, e^{-ita}\, dt + \frac{L(0)\hat{h}(0)}{v_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha a} \frac{\sin t}{t} dt\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{h}(t)\, \mathcal{R}(t)\, e^{-ita}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha \le |t| \le b} \hat{h}(t)\, \mathcal{E}(t)\, e^{-ita}\, dt.\end{aligned}$$

avec des fonctions $\chi(\cdot)$, $\mathcal{R}(\cdot)$, $\mathcal{E}(\cdot)$ dont il n'est pas nécessaire ici de rappeler les définitions précises : rappelons juste que $\chi(\cdot)$ et $\mathcal{R}(\cdot)$ sont intégrables sur $[-\alpha, \alpha]$, et que $\mathcal{E}(\cdot)$ l'est sur $\{t : \alpha \le |t| \le b\}$. En vertu du lemme de Riemann-Lebesgue (Prop. 1.3), la première et les deux dernières intégrales ci-dessus convergent vers 0 quand $|a| \to +\infty$. Enfin rappelons que

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^{\alpha a} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{a \to -\infty} \int_0^{\alpha a} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

Ceci démontre (2.5). □

2.2.4 Preuve de la proposition 2.5.

On a :

$$\forall r \in [\frac{1}{2}, 1[,\ \forall t \in [-\alpha, \alpha],\ |1 - r\lambda(t)| \ \ge\ \frac{v_0}{4}|t| \tag{2.15}$$

et en particulier : $\forall r \in [\frac{1}{2}, 1[, \forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $1 - r\lambda(t) \neq 0$. L'inégalité précédente s'établit avec (2.6) en observant que

$$|1 - r\lambda(t)| \ge |(1 - r) - irv_0 t| \ - \ r|t\,\varepsilon(t)| \ge r|t|\,(v_0 - |\varepsilon(t)|) \ \ge\ \frac{3v_0}{8}|t|.$$

Remarquons maintenant que la fonction qui intervient dans la définition de $2\pi\, V_{f,r}(h_a)$ (cf. (2.13)) s'écrit sous la forme

$$\frac{\lambda(t)L(t)\,\hat{h}(t)}{1 - r\lambda(t)}\, e^{-ita} = f_1(r,t) + f_2(r,t) + f_3(r,t),$$

où l'on a posé pour $(r, t) \in [\frac{1}{2}, 1[\times[-\alpha, \alpha]$:

$$f_1(r,t) = \frac{\lambda(t)L(t)\,\hat{h}(t) - L(0)\hat{h}(0)}{1 - r\lambda(t)}\, e^{-ita},$$

$$f_2(r,t) = rL(0)\hat{h}(0)\frac{\lambda(t) - 1 - iv_0 t}{(1 - r\lambda(t))(1 - r(1 + iv_0 t))}\, e^{-ita}$$

et

$$f_3(r,t) = L(0)\frac{\hat{h}(0)e^{-ita}}{1 - r(1 + iv_0 t)}.$$

Nous allons étudier $\lim_{r \to 1^-} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_k(r,t)\, dt$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

Lemme 2.3. *On a :* $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(r,t)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\lambda(t)L(t)\,\hat{h}(t) - L(0)\hat{h}(0)}{1-\lambda(t)}\,e^{-ita}\,dt.$

Démonstration. Tout d'abord observons que

$$f_1(r,t) = \left(\frac{\lambda(t)(L(t)-L(0))\hat{h}(t)}{1-r\lambda(t)} + L(0)\lambda(t)\frac{\hat{h}(t)-\hat{h}(0)}{1-r\lambda(t)} + L(0)\frac{\lambda(t)-1}{1-r\lambda(t)}\hat{h}(0)\right)\,e^{-ita}.$$

Par l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$, λ et L sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\alpha,\alpha]$. De plus, $\hat{h}\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. D'après (2.15), il existe donc $M_1>0$ tel que

$$\forall (r,t)\in[\frac{1}{2},1]\times([-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}),\ |f_1(r,t)|\leq M_1. \tag{2.16}$$

Comme par ailleurs,

$$\forall t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\},\quad \lim_{r\to 1^-} f_1(r,t) = \frac{\lambda(t)L(t)\,\hat{h}(t)-L(0)\hat{h}(0)}{1-\lambda(t)}\,e^{-ita}, \tag{2.17}$$

la conclusion du lemme s'obtient avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

Lemme 2.4. *On a :* $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_2(r,t)\,dt = \frac{iL(0)\hat{h}(0)}{v_0}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\lambda(t)-1-iv_0t}{(1-\lambda(t))t}\,e^{-ita}\,dt.$

Démonstration. Pour $r\in[\frac{1}{2},1]$, on a $|\ 1-r(1+iv_0t)\ |\geq\frac{v_0}{2}|t|$. Il existe donc $M_2>0$ telle que

$$\forall (r,t)\in[\frac{1}{2},1]\times([-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}),\ |f_2(r,t)|\leq M_2\frac{|\lambda(t)-1-iv_0t|}{t^2} \tag{2.18}$$

Par ailleurs, on a :

$$\forall t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\},\quad \lim_{r\to 1^-} f_2(r,t) = \frac{iL(0)\hat{h}(0)}{v_0}\left(\frac{\lambda(t)-1-iv_0t}{(1-\lambda(t))t}\right)e^{-ita}. \tag{2.19}$$

On conclut à nouveau grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue car par l'hypothèse (2.4), la fonction $t\mapsto\frac{\lambda(t)-1-iv_0t}{t^2}$ est intégrable sur $[-\alpha,\alpha]$. □

D'après (2.17) (2.19), on a pour tout $t\in[-\alpha,\alpha],\ t\neq 0$:

$$\lim_{r\to 1^-} f_1(r,t) + \lim_{r\to 1^-} f_2(r,t) = \left(\frac{\lambda(t)L(t)\,\hat{h}(t)}{1-\lambda(t)} - \frac{iL(0)\hat{h}(0)}{v_0t}\right)e^{-ita} = \chi(t)\,e^{-ita}.$$

Lemme 2.5. *On a pour tout* $t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$ *:* $|\chi(t)|\leq M_1+M_2\frac{|\lambda(t)-1-iv_0t|}{t^2}$*. En particulier* χ *est intégrable sur* $[-\alpha,\alpha]$*.*

Démonstration. Comme $|\chi(t)| = \lim_{r\to 1^-}|f_1(r,t)+f_2(r,t)|$, l'inégalité souhaitée résulte de (2.16) et (2.18). L'intégrabilité de χ sur $[-\alpha,\alpha]$ découle de (2.4). □

Lemme 2.6. *On a :* $\lim_{r\to 1^-}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_3(r,t)\,dt = \frac{L(0)\hat{h}(0)}{v_0}\left(\pi + \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\sin t}{t}dt\right).$

Démonstration. Posons $J(a,r) := \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{e^{-ita}}{1-r(1+iv_0t)}\,dt$. Pour $a = 0$, le calcul explicite de $J(0,r)$ donne :

$$\lim_{r\to 1^-} J(0,r) = \lim_{r\to 1^-}\frac{2}{v_0 r}arctan\left(\frac{v_0 r\alpha}{1-r}\right) = \frac{\pi}{v_0}.$$

Supposons maintenant $a \neq 0$, et écrivons

$$\begin{aligned} J(a,r) &= \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{1}{a(1-r)+irv_0t}dt + \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\cos t - 1}{a(1-r)+irv_0t}dt + \int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{i\sin t}{a(1-r)+irv_0t}dt \\ &:= J_1(a,r) \; + \; J_2(a,r) \; + \; J_3(a,r). \end{aligned}$$

Le calcul explicite de $J_1(a,r)$ donne $\lim_{r\to 1} J_1(a,r) = \frac{\pi}{v_0}$. Par ailleurs, en utilisant les inégalités

$$\frac{1-\cos t}{|a(1-r)+irv_0t|} \le \frac{|t|}{v_0}, \quad \text{puis} \quad |a(1-r)+irv_0t)| \ge rv_0|t| \ge \tfrac{v_0}{2}|t|,$$

pour $r \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $t \in [-\alpha, \alpha]$ (utiliser $1 - \cos t \le \frac{t^2}{2}$ pour la première inégalité), le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{r\to 1} J_2(a,r) = -\frac{i}{v_0}\int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\cos t - 1}{t}\,dt = 0.$$

De même, en utilisant $\frac{|\sin t|}{|a(1-r)+irv_0t|} \le \frac{2}{v_0}$, il vient : $\lim_{r\to 1} J_3(a,r) = \frac{1}{v_0}\int_{-\alpha a}^{\alpha a}\frac{\sin t}{t}\,dt.$ □

2.2.5 Enoncé d'un théorème de renouvellement unidimensionnel sous une hypothèse alternative.

Dans les applications au cadre markovien des chapitres 4 et 5, nous appliquerons le théorème 2.1 en vérifiant l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$ (plus précisément l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1+\varepsilon)$ du corollaire 2.1). Dans cette sous-section, nous démontrons que l'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$ peut être cependant un peu affaiblie.

En effet, remarquons que dans la preuve du théorème 2.1 proposée ci-dessus, le fait que λ et $L(\cdot)$ soient supposées de classe $\mathcal{C}^1$ nous sert à justifier l'existence du développement limité à l'ordre 1 de λ en 0 (cf. Lemme 2.1) et à majorer $|f_1(r,t)|$ par une fonction intégrable au voisinage de 0, indépendante de r (cf. Lemme 2.3). Si l'on remplace l'hypothèse $L(\cdot) \in C^1\big([-R,R],\mathbb{C}\big)$ par :

$$L(\cdot)\,\text{mesurable bornée sur}\,[-R,R],\;\; L(\cdot)\,\text{continue en}\;0$$

et

$$t \mapsto \frac{|L(t)-L(0)|}{|t|}\;\;\text{est intégrable au voisinage de}\,0,$$

les calculs effectués dans la preuve du lemme 2.3 montre que $|f_1(r,t)|$ est encore majorée par une fonction intégrable au voisinage de 0, indépendante de r, l'hypothèse $L(\cdot)$ continue en 0 (avec $L(0) \neq 0$) permettant d'obtenir $|\lambda(t)| < 1$ au voisinage de 0 (cf. Lemme 2.6). De plus, il n'est pas nécessaire de supposer la continuité de $R_n(\cdot)$ et la continuité de la somme $\mathcal{R}(\cdot)$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} R_n(\cdot)$. Il suffit de supposer que la suite de fonctions (R_n) est uniformément bornée sur $[-R, R]$ et que $\mathcal{R}$ est intégrable au voisinage de 0 (cf. Preuve du lemme 2.2).

Fixons donc à nouveau $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable vérifiant (2.1). L'hypothèse $\mathcal{R}_1(1)$ du théorème 2.1 peut donc être remplacée par l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{R}_1}$ suivante :

Hypothèse $\widetilde{\mathcal{R}_1}$. *Les deux conditions suivantes sont supposées satisfaites :*
(i) Il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in]-R, R[$ et tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{itS_n}\big] = \lambda(t)^n\, L(t) + R_n(t)$$

sachant que :

- $\lambda(0) = 1$, *λ mesurable bornée sur $[-R, R]$ et λ dérivable en 0,*
- *$L(\cdot)$ mesurable bornée sur $[-R, R]$, L continue en 0 et*

$$\int_{-R}^{R} \frac{|L(t) - L(0)|}{|t|}\, dt < +\infty.$$

- *La suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions mesurables uniformément bornées sur $[-R, R]$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} R_n(\cdot)$ converge uniformément sur $[-R, R]$ vers une fonction de $\mathcal{R}$, intégrable sur $[-R, R]$.*

(ii) $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{itS_n}\big]$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^*$ vers une fonction continue.

Les remarques ci-dessus nous permettent alors d'énoncer un théorème de renouvellement unidimensionnel :

Théorème 2.3. *Supposons que l'hypothèse $\widetilde{\mathcal{R}_1}$ soit vérifiée et que de plus : $\lambda'(0) = iv_0$, avec $v_0 \in]0, +\infty[$, $L(0) \neq 0$ et*

$$\int_{-R}^{R} \frac{|\lambda(t) - 1 - iv_0 t|}{t^2}\, dt < +\infty.$$

Alors les propriétés (i) et (ii) du théorème 2.1 sont vérifiées.

2.3 Un théorème de renouvellement dans le cas centré et en dimension $d \geq 3$.

Dans cette section, *d est un entier naturel supérieur ou égal à 3*, et on pose

$$m_d := \max(d - 2, 2). \tag{2.20}$$

Rappelons que $\mathcal{M}_d$ désigne l'ensemble des mesures positives μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telles que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, on ait $\mu(K) < +\infty$ (cf. le paragraphe 1.2).

2.3.1 Enoncé du théorème de renouvellement.

Dans l'énoncé suivant, la constante C_d est celle du théorème de renouvellement de [70] (cas i.i.d. centré) (cf. Introduction), c'est-à-dire :

$$C_d = 2^{-1}\,\pi^{-\frac{d}{2}}\,(\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{d-2}{2}\Big) \tag{2.21}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler, et où Σ sera ici la matrice symétrique définie grâce à (2.3). Enfin on considère $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit) si $d = 3$ ou $d = 4$, et $\varepsilon = 0$ si $d \geq 5$.

Théorème 2.4. *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$ soit vérifiée avec $f : E \to [0,+\infty[$ mesurable vérifiant (2.1), et que l'on ait de plus $(\nabla\lambda)(0) = 0$ et Σ définie positive. Alors, pour toute partie borélienne bornée B de $\mathbb{R}^d$, la série $\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}[f(X_n)\,1_B(S_n)]$ converge. En outre la mesure positive U_f définie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :*

$$U_f\ :\ B \mapsto U_f(B) := \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}[f(X_n)\,1_B(S_n)]$$

appartient à $\mathcal{M}_d$, et la famille de mesures $\big\{\langle\Sigma^{-1}a,a\rangle^{\frac{d-2}{2}}\,U_f(\cdot+a)\big\}_{a\in\mathbb{R}^d}$ converge vaguement vers la mesure $C_d\,L(0)\,\mathcal{L}_d$ quand $\|a\| \to +\infty$.

D'après les rappels du paragraphe 1.2, la convergence vague ci-dessus signifie que l'on a

$$\lim_{\|a\|\to+\infty}\langle\,\Sigma^{-1}a,a\,\rangle^{\frac{d-2}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\big[\,f(X_n)\,g(S_n-a)\,\big] = C_d\,L(0)\mathcal{L}_d(g). \tag{2.22}$$

pour tout $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, ou bien encore pour $g = 1_B$ si B est une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ de frontière Lebesgue-négligeable.

2.3.2 Preuve du théorème 2.4.

On reprend la méthode utilisée dans [4, 5] en détaillant complètement certains points résumés dans [4, 5]. Remarquons que dans le cas $d = 3$ ou $d = 4$, l'ordre optimal 2 du cas indépendant (cf. Introduction) est remplacé par $2+\varepsilon$, la présence technique du réel ε nous servant essentiellement à prouver le lemme 2.8 ci-dessous.

Rappelons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_k(d)$ désigne l'espace des fonctions complexes h intégrables sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\hat{h} \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, voir le paragraphe 1.2.2. Nous utiliserons dans ce paragraphe l'espace $\mathcal{H}_{d-2}(d)$, noté simplement $\mathcal{H}_{d-2}$. La proposition 1.13 (voir Rq. 1.2) permet d'affirmer que le théorème 2.4 est une conséquence directe du théorème suivant. Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on définit : $u_a := u(\cdot - a)$.

Théorème 2.5. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.4 soient satisfaites. Alors, pour tout $h \in \mathcal{H}_{d-2}$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$, la série $U_f(h_a) := \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\big[\,f(X_n)\,h_a(S_n)\,\big]$ converge et*

$$\lim_{\|a\|\to+\infty}\langle\,\Sigma^{-1}a,a\,\rangle^{\frac{d-2}{2}}\,U_f(h_a) = C_d\,L(0)\mathcal{L}_d(h). \tag{2.23}$$

Preuve du théorème 2.5. D'après l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$, L est continue en 0 et

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle + o(\|t\|^2)$$

car λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur la boule ouverte $B(0,R)$. La matrice Σ étant définie positive et $L(0)\neq 0$, on fixe désormais un réel $\alpha \in]0,R[$ tel que, pour tout $\|t\|\leq \alpha$, on ait :

$$|\lambda(t)| \leq 1 - \frac{1}{4}\langle \Sigma t, t\rangle \quad \text{et} \quad L(t)\neq 0. \tag{2.24}$$

Notons, pour tout $t\in\mathbb{R}^d$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$E_n(t) := \mathbb{E}[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}].$$

Soit $h\in\mathcal{H}_{d-2}$. Soit $b>\alpha$ tel que, pour tout $\|t\|>b$, on ait $\hat{h}(t)=0$. Soit $r\in]0,\alpha[$. Soit $\chi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, à support dans $\{t : \|t\|\leq\alpha\}$, telle que $\chi(t)=1$ si $\|t\|\leq r$. L'égalité de la proposition 2.2 s'écrit alors comme suit :

$$(2\pi)^d\, \mathbb{E}\big[f(X_n)\, h(S_n)\big] = \int_{\|t\|\leq\alpha} \chi(t)\hat{h}(t)\, E_n(t)\, dt + \int_{r<\|t\|\leq b} (1-\chi(t))\, \hat{h}(t)\, E_n(t)\, dt.$$

Soient $a\in\mathbb{R}^d$ et $N\in\mathbb{N}^*$. En considérant h_a à la place de h dans l'égalité précédente (noter que $\widehat{h_a}(t) = \hat{h}(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}$), et en utilisant l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, h(S_n-a)\big] &= \sum_{n=1}^N \int_{\|t\|\leq\alpha} \chi(t)\, \hat{h}(t)\, \lambda(t)^n\, L(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt \\
&+ \sum_{n=1}^N \int_{\|t\|\leq\alpha} \chi(t)\, \hat{h}(t)\, R_n(t)\, L(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt \\
&+ \sum_{n=1}^N \int_{r<\|t\|\leq b} (1-\chi(t))\, \hat{h}(t)\, E_n(t)\, L(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt.
\end{aligned}$$

D'où la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n-a)]$ avec :

$$(2\pi)^d \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, h(S_n-a)\big] = I(a)+J(a)+K(a)$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad I(a) &:= \int_{\|t\|\leq\alpha} \chi(t)\, \hat{h}(t)\, \frac{\lambda(t)}{1-\lambda(t)}\, L(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt \\
J(a) &:= \int_{\|t\|\leq\alpha} \chi(t)\, \hat{h}(t)\, \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} R_n(t)\Big)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt \\
K(a) &:= \int_{r<\|t\|\leq b} (1-\chi(t))\, \hat{h}(t)\, \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t)\Big)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt.
\end{aligned}$$

En effet, il résulte de (2.24) que $\sum_{n\geq 1}|\lambda(t)|^n = \frac{|\lambda(t)|}{1-|\lambda(t)|} \leq \frac{4}{\langle\Sigma t,t\rangle}$ pour $0<\|t\|\leq\alpha$ et comme $d\geq 3$ et Σ est inversible, la fonction $t\mapsto \frac{1}{\langle \Sigma t,t\rangle}$ est intégrable sur $B(0,\alpha)$. Ainsi le terme $I(a)$

provient d'une application du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Les termes $J(a)$ et $K(a)$ résultent des propriétés de convergence uniforme de l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$.

Le théorème 2.5 est alors une conséquence des trois lemmes ci-dessous. $\square$

Lemme 2.7. *$J(a)+K(a)=o(\|a\|^{-(d-2)})$ quand $\|a\|\to+\infty$.*

Démonstration. Ce résultat découle de la proposition 1.4 du chapitre 1 car, d'après l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$, $J(a)$ et $K(a)$ sont des intégrales de fonctions de $\mathcal{C}_c^{d-2}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$. $\square$

Etudions maintenant $I(a)$. Un calcul simple conduit à $I(a)=I_1(a)+I_2(a)+I_3(a)$ avec

$$\begin{aligned}
I_1(a) &:= \int_{\|t\|\le\alpha}\chi(t)\,\frac{\hat{h}(t)\lambda(t)\,L(t)-\hat{h}(0)L(0)}{1-\lambda(t)}\,e^{-i\langle t,a\rangle}\,dt\\
I_2(a) &:= 2\,\hat{h}(0)\,L(0)\int_{\|t\|\le\alpha}\frac{\chi(t)}{\langle\Sigma t,t\rangle}\,e^{-i\langle t,a\rangle}\,dt\\
I_3(a) &:= 2\,\hat{h}(0)\,L(0)\int_{\|t\|\le\alpha}\chi(t)\,\frac{\lambda(t)-1+\frac{1}{2}\langle\Sigma t,t\rangle}{(1-\lambda(t))\langle\Sigma t,t\rangle}\,e^{-i\langle t,a\rangle}\,dt.
\end{aligned}$$

Lemme 2.8. *$I_1(a)+I_3(a)=o(\|a\|^{-(d-2)})$ quand $\|a\|\to+\infty$.*

Démonstration. Notons que $I_1(\cdot)$ et $I_3(\cdot)$ sont les transformées de Fourier $I_1(a)=\hat{u}(a)$ et $I_3(a)=\hat{v}(a)$ de fonctions u et v qui sont toutes les deux définies sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ et sont nulles en dehors de la boule $B(0,\alpha)$. Pour étudier le comportement de $I_1(a)$ et $I_3(a)$ quand $\|a\|\to+\infty$, nous allons ci-dessous appliquer la proposition 1.6. Pour cela, nous aurons besoin de majorer les dérivées partielles de u et v, et pour ce dernier point nous appliquerons la proposition 1.15.

Pour étudier $I_1(a)$, définissons la fonction θ_1 sur $\mathbb{R}^d$, en posant pour $t\in\mathbb{R}^d$

$$\theta_1(t)=\chi(t)\left(\hat{h}(t)\lambda(t)\,L(t)-\hat{h}(0)L(0)\right),$$

en prolongeant arbitrairement les fonctions λ et L sur $\mathbb{R}^d$. Comme $\theta_1\in C_c^{d-2}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ et $\theta_1(0)=0$, il existe $C>0$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}^d$, $|\theta_1(t)|\le C\|t\|$. Notons $V:=[-\alpha,\alpha]^d$. On peut supposer que le réel α est choisi tel que $\sqrt{d}\,\alpha<\min(1,R)$ de sorte que si $t\in V$, $\|t\|<1$ et $t\in B(0,R)$. Posons $w(t)=1-\lambda(t)$, pour tout $t\in B(0,R)$. On a $(\nabla w)(0)=0$ et comme λ vérifie (2.24) et Σ est définie positive, w satisfait aux hypothèses de la proposition 1.15 avec $m=d-2$ et $W=B(0,R)$. Soient $\gamma\in\mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma|\le d-2$ et $D_\gamma\ge0$ tels que, pour tout $t\in V$, $|\partial^\gamma\theta_1(t)|\le D_\gamma$. On a d'une part, d'après (1.6)

$$\forall t\in V\setminus\{0\},\quad \left|\theta_1(t)\,\partial^\gamma(\frac{1}{w})(t)\right|\le\frac{C\,C_\gamma}{\|t\|^{1+|\gamma|}}.$$

Et d'autre part, pour $\beta\in\mathbb{N}^d$ tel que $\beta\ne\gamma$, $\beta\le\gamma$, comme $|\beta|\le|\gamma|-1$ et $\|t\|<1$ si $t\in V$, on a à nouveau grâce à (1.6)

$$\forall t\in V\setminus\{0\},\quad \left|\partial^{\gamma-\beta}\theta_1(t)\,\partial^\beta(\frac{1}{w})(t)\right|\ \le\ \frac{D_{\gamma-\beta}\,C_\beta}{\|t\|^{2+|\beta|}}\ \le\ \frac{D_{\gamma-\beta}\,C_\beta}{\|t\|^{1+|\gamma|}}.$$

Posons $u(t) = \frac{\theta_1(t)}{1-\lambda(t)}$, si $0 < \|t\| \le \alpha$, et $u(t) = 0$ si $\|t\| > \alpha$. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Les majorations précédentes et la formule de Leibniz nous donnent :

$$\forall i = 0, \ldots, d-2,\ \exists M_i > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ |u^{(i)}(t)| \le \frac{M_i}{\|t\|^{1+i}}, \tag{2.25}$$

où $u^{(i)}(\cdot)$ représente une dérivée partielle quelconque d'ordre i de u. D'après (2.25), chaque dérivée partielle d'ordre $\le d-3$ de u est dominée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par $\|\cdot\|^{-(d-2)}$ et les dérivées partielles d'ordre $d-2$ de u sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$ car dominées par $\|\cdot\|^{-(d-1)}$. Comme $I_1(a) = \hat{u}(a)$, on obtient $\lim_{\|a\| \to +\infty} \|a\|^{d-2} I_1(a) = 0$ en utilisant la proposition 1.6 avec la fonction u, et $k = d-2$, $s = d-2$.

Pour étudier $I_3(a)$, les mêmes estimations peuvent être établies en définissant $\theta_3 \in \mathcal{C}_c^{d-2}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^d$, en posant pour tout $t \in \mathbb{R}^d$

$$\theta_3(t) = \chi(t) \left(\lambda(t) - 1 + \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t \rangle \right),$$

la fonction λ ayant été arbitrairement prolongée à $\mathbb{R}^d$. Supposons tout d'abord $d \ge 5$. Alors $\theta_3 \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et on vérifie facilement que $|\theta_3(t)| = O(\|t\|^3)$, $|\theta_3^{(1)}(t)| = O(\|t\|^2)$ et $|\theta_3^{(2)}(t)| = O(\|t\|)$. Posons $s(t) = \langle \Sigma t, t \rangle$ si $t \in V := [-\alpha, \alpha]^d$. Comme Σ est définie positive et $(\nabla s)(0) = 0$, la fonction $s(\cdot)$ vérifie les hypothèses de la proposition 1.15 avec $m = d-2$ et $W = B(0, R)$. Notons maintenant

$$v(t) = \frac{\theta_3(t)}{(1-\lambda(t))\langle \Sigma t, t \rangle} \quad \text{si } 0 < \|t\| \le \alpha, \qquad \text{et} \qquad v(t) = 0 \ \text{ si } \ \|t\| > \alpha.$$

La fonction v est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| \le d-2$ et $t \in V \setminus \{0\}$. D'après la formule de Leibniz, la dérivée partielle $\partial^\gamma v(t)$ est (à des coefficients binômiaux près) une somme de termes de la forme

$$\partial^\beta \theta_3(t)\, \partial^\delta (\frac{1}{w})(t)\, \partial^\eta (\frac{1}{s})(t) \quad \text{avec} \ \ |\beta| + |\delta| + |\eta| = |\gamma|,$$

où $w(t) = 1 - \lambda(t)$. En procédant comme avec la fonction u ci-dessus (considérer ici les trois cas $|\beta| = 0, 1, 2$, et le cas $|\beta| \ge 3$), on montre que :

$$\forall i = 0, \ldots, d-2,\ \exists M_i' > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ |v^{(i)}(t)| \le \frac{M_i}{\|t\|^{1+i}}. \tag{2.26}$$

D'après (2.26), chaque dérivée partielle d'ordre $\le d-3$ de v est dominée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par $\|\cdot\|^{-(d-2)}$ et les dérivées partielles d'ordre $d-2$ de v sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$ car dominée par $\|\cdot\|^{-(d-1)}$. Comme $I_3(a) = 2\,\hat{h}(0)\ L(0)\,\hat{v}(a)$, on obtient $\lim_{\|a\| \to +\infty} \|a\|^{d-2} I_3(a) = 0$ en utilisant la proposition 1.6 avec la fonction v, et $k = d-2$, $s = d-2$.

Examinons maintenant le cas $d = 3$ ou 4.[1] On a alors $|\theta_3(t)| = O(\|t\|^{2+\varepsilon})$, $|\theta_3^{(1)}(t)| = O(\|t\|^{1+\varepsilon})$ et $|\theta_3^{(2)}(t)| = O(\|t\|^{\varepsilon})$. On montre comme précédemment que

$$\forall i = 0, \ldots, d-2,\ \exists M_i'' > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ |v^{(i)}(t)| \le \frac{M_i}{\|t\|^{i+2-\varepsilon}}. \tag{2.27}$$

[1] C'est pour traiter ce cas que nous avons introduit un réel $\varepsilon > 0$ et considéré non pas m_d mais $m_d + \varepsilon$ dans le théorème 2.4.

D'après (2.27), chaque dérivée partielle d'ordre $\leq d-3$ de v est dominée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par $\|\cdot\|^{-(d-1-\varepsilon)}$ et les dérivées partielles d'ordre $d-2$ de v sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$ car dominée par $\|\cdot\|^{-(d-\varepsilon)}$. Comme $I_3(a) = 2\,\hat{h}(0)\,L(0)\,\hat{v}(a)$, on obtient $\lim_{\|a\|\to+\infty} \|a\|^{d-2} I_3(a) = 0$ en utilisant la proposition 1.6 avec la fonction v, et $k = d-2$, $s = d-1-\varepsilon$. $\square$

Lemme 2.9. *Soit* $C'_d = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\, 2^{\frac{d}{2}-1}\, \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}}$. *Alors :*

$$\lim_{\|a\|\to+\infty} \langle\, \Sigma^{-1} a, a\,\rangle^{\frac{d-2}{2}} I_2(a) = C'_d\, \hat{h}(0)\, L(0).$$

Démonstration. Rappelons que la transformation de Fourier est une bijection de $S(\mathbb{R}^d)$ sur $S(\mathbb{R}^d)$. Comme $\chi \in S(\mathbb{R}^d)$, il existe donc une unique fonction ψ de $\in S(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{\psi} = \chi$. Soit $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Notant $\psi_a(\cdot) := \psi(\cdot - a)$, on a

$$I_2(a) = 2\hat{h}(0)\, L(0) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\widehat{\psi_a}(t)}{\langle \Sigma t, t\rangle} dt.$$

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres strictement positives de la matrice de covariance Σ. Soit $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d})$ et soit P une matrice orthogonale d'ordre d telle que

$$P^{-1} \Sigma P = \Delta^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d).$$

On a $\langle \Sigma t, t\rangle = \langle \Delta^2 P^{-1} t, P^{-1} t\rangle = \|\Delta P^{-1} t\|^2$. Ainsi, en posant $t = P\Delta^{-1} u$, on obtient

$$I_2(a) = 2\,\hat{h}(0)\, L(0) \int_{\mathbb{R}^d} (\det \Delta)^{-1}\, \widehat{\psi_a}(P\Delta^{-1} u)\, \frac{1}{\|u\|^2} du.$$

La transformation de Fourier de $v \mapsto g(v) = \psi(P\Delta v - a)$ est $u \mapsto \hat{g}(u) = (\det \Delta)^{-1}\, \widehat{\psi_a}(P\Delta^{-1} u)$. De la Proposition 1.9 du chapitre 1, on obtient

$$I_2(a) = 2\,\hat{h}(0)\, L(0)\, c \int \psi(P\Delta v - a)\, \frac{1}{\|v\|^{d-2}}\, dv, \tag{2.28}$$

avec $c = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\, 2^{\frac{d}{2}-2}\, \Gamma(\frac{d-2}{2})$. Posons $b = \Delta^{-1} P^{-1} a$, $\beta = \|b\|$ et $\tilde{b} = \frac{1}{\beta} b$, de sorte que $\|\tilde{b}\,\| = 1$. Définissons enfin $F(x) = \psi(-P\Delta\, x)$ et $F_\beta(x) = \beta^d\, F(\beta\, x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $\beta > 0$. On a :

$$I_2(a) = 2\,\hat{h}(0)\, L(0)\, c \int F(b - v)\, \frac{1}{\|v\|^{d-2}}\, dv \;=\; 2\,\hat{h}(0)\, L(0)\, c \int F_\beta(\tilde{b} - w) \frac{1}{\|\beta w\|^{d-2}}\, dw,$$

ou encore $\beta^{d-2}\, I_2(a) = 2\, c\, \hat{h}(0)\, L(0)\, (F_\beta * f_{d-2})(\tilde{b})$, avec $f_{d-2}(w) := \frac{1}{\|w\|^{d-2}}$, où $*$ désigne le produit de convolution de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$. La proposition 1.14 du chapitre 1 montre alors que la convergence suivante est uniforme en $\tilde{b} \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|\tilde{b}\,\| = 1$:

$$\lim_{\beta\to+\infty} (F_\beta * f_{d-2})(\tilde{b}) = \int_{\mathbb{R}^d} F(w) dw. \tag{2.29}$$

Les calculs précédents donnent le résultat souhaité car $\beta = \|Pb\| = \|\Sigma^{-\frac{1}{2}} a\| = \langle \Sigma^{-1} a, a\rangle^{\frac{1}{2}}$ et $\int F(w) dw = (\det \Delta)^{-1} \int \psi(y) dy = (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}}$ car $\int \psi(y) dy = \hat{\psi}(0) = \chi(0) = 1$. $\square$

2.4 Un théorème de renouvellement dans le cas décentré en dimension $d \geq 2$.

Dans cette section, *d est un entier naturel supérieur ou égal à 2*, et on pose

$$m_d := \max(\frac{d-1}{2}, 2). \tag{2.30}$$

2.4.1 Enoncé du théorème de renouvellement.

Soit a fonction mesurable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$. Introduisons la condition (et la notation) suivante sur a :

$$\Lambda := \lim_{\tau \to +\infty} \frac{a(\tau) - \tau\vec{m}}{\sqrt{\tau}} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.31}$$

Rappelons que lorsque l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ de la section 2.1 est satisfaite avec $m \geq 2$, on note : $\vec{m} = -i(\nabla\lambda)(0)$ et $\Sigma = -Hess\,\lambda(0)$.

Enfin on considère $\varepsilon = 0$ si $d = 3$ ou $d = 4$, et $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit) si $d \geq 5$.

Théorème 2.6. *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d + \varepsilon)$ soit vérifiée avec $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable vérifiant (2.1), et que l'on ait de plus $L(0) \neq 0$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et Σ définie positive. Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ vérifiant (2.31). Alors la famille de mesures positives $(R_\tau)_\tau$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par :*

$$R_\tau(A) := (2\pi\tau)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} I\!E\big[f(X_n)\, 1_A(S_n - a(\tau))\big], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \tag{2.32}$$

converge vaguement vers $C\mathcal{L}_d(\cdot)$ quand $\tau \to +\infty$, où $C := C(L, \vec{m}, \Sigma, \Lambda)$ est la constante définie par :

$$C(L, \vec{m}, \Sigma, \Lambda) \;:=\; L(0)\, \frac{(\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}}{\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|}\, \exp\bigg(-\frac{\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|^2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda\|^2 - \langle\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda\rangle^2}{2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|^2}\bigg).$$

La condition (2.31) est clairement satisfaite lorsque $a(\tau) = \tau\vec{m}$, cas particulier de "convergence vers l'infini dans la direction $\vec{m}$". La condition (2.31) de "convergence vers l'infini autour de la direction $\vec{m}$" a été introduite dans [72] pour généraliser certains résultats de [4]. Rappelons que la proposition 2.1 donne des conditions suffisantes (qui seront vérifiées dans nos exemples) pour que le vecteur $\vec{m}$ (a priori défini dans $\mathbb{C}^d$) appartienne à $\mathbb{R}^d$ et pour que la matrice symétrique Σ soit positive.

Réduction du problème. Comme dans [4] et dans les deux sections précédentes, la question de convergence vague des mesures positives $(R_\tau(\cdot))_{\tau>0}$ (correctement normalisées) se réduit à la convergence de certaines intégrales dépendant du paramètre τ.

Dans cette section, nous notons plus simplement $\mathcal{H}$ l'espace $\mathcal{H}_{+\infty}(d)$ des fonctions complexes h intégrables sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\hat{h} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. La proposition 1.13 permet d'affirmer que le théorème 2.6 est une conséquence directe du théorème suivant :

Théorème 2.7. *Sous les hypothèses du théorème 2.6, on a pour tout $h \in \mathcal{H}$:*

$$\lim_{\tau \to +\infty} (2\pi\tau)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\, f(X_n)\, h(S_n - a(\tau))\,] = C(L, \vec{m}, \Sigma, \Lambda) \int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx. \tag{2.33}$$

La preuve du théorème 2.7, présentée ci-dessous, reprend pour l'essentiel les arguments de la preuve [4] mais simplifie l'étude de l'intégrale donnant la limite (2.33). Plus précisement, la première étape de la preuve consiste (comme dans le cas centré) à transformer par analyse de Fourier la somme du premier membre de (2.33) en une somme de trois intégrales. On vérifie que deux d'entre elles sont des $o(\tau^{-(d-1)/2})$, quand τ tend vers $+\infty$, en utilisant un résultat du chapitre 1 sur le comportement en l'infini de la transformée de Fourier d'une fonction höldérienne à support compact (cf. sous-section 2.4.3). L'intégrale restante est décomposée en trois intégrales et les propositions 1.7 et 1.8 montrent que deux de ces intégrales sont des $o(\tau^{-(d-1)/2})$ (cf. sous-section 2.4.4). Enfin une étude asymptotique de la dernière intégrale, basée sur ces mêmes propositions 1.7 et 1.8, permet d'obtenir la limite (2.33) sans utiliser, comme dans [4], des résultats sur les fonctions de Bessel modifiées (cf. sous-sections 2.4.5 et 2.4.6).

Une simplification élémentaire : *un changement de coordonnées.*

Notons $\vec{e}_1$ le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit T une isométrie de $\mathbb{R}^d$ telle que $T(\vec{m}) = \|\vec{m}\|\vec{e}_1$. Quitte à remplacer S_n par TS_n, on peut supposer sans perte de généralité que $\vec{m} = \|\vec{m}\|\vec{e}_1$. En fait, ceci revient à remplacer dans la preuve ci-dessous $\lambda(\cdot), L(\cdot), R_n(\cdot), h(\cdot), \Sigma$ par $\lambda \circ T^{-1}, L \circ T^{-1}, R_n \circ T^{-1}, h \circ T^{-1}, T \circ \Sigma \circ T^{-1}$ respectivement.

La fonction w introduite au chapitre 1 (cf. (1.2)) joue un rôle important dans la preuve du théorème 2.7. Rappelons que, pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$w(x) := -ix_1 + \|x'\|^2$$

où $x' := (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Remarque 2.3. *Une première conséquence de la simplification ci-dessus concerne la fonction*

$$v_0 := 1 - \lambda$$

où $\lambda(\cdot)$ est définie en (2.2). D'après l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d + \varepsilon)$, $v_0 \in \mathcal{C}_b^{m_d+\varepsilon}\big(B(0,R), \mathbb{C}\big)$. Comme $(\nabla\lambda)(0) = i\vec{m} = i\|\vec{m}\|\vec{e}_1$, on a donc

$$(\partial_j v_0)(0) = 0,\ j \in \{2, \ldots, d\}.$$

En outre $\lambda(t) = 1 + i\|\vec{m}\|t_1 - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle + o(\|t\|^2)$ car $\Sigma = -Hess\,\lambda(0)$. Comme Σ est une matrice symétrique réelle $d \times d$ définie positive, on peut aussi supposer, quitte à diminuer la valeur de R, qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall x \in B(0,R),\ \alpha|w(x)| \le |v_0(x)| \le \beta|w(x)|.$$

Enfin, L étant continue sur $B(0,R)$ et $L(0) \neq 0$, nous supposerons aussi, quitte à diminuer à nouveau la valeur de R, que $\forall x \in B(0,R)$, $L(x) \neq 0$. Cette dernière condition implique que, pour $x \in B(0,R) \setminus \{0\}$, la série $\sum_{n \ge 1} \lambda^n(x)$ converge et donc que $|\lambda(x)| < 1$.

Désormais nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 2.6. Les sous-sections suivantes sont consacrées à la preuve du théorème 2.7. Le début de la preuve (jusqu'à (2.34) ci-dessous) est identique à celle du cas centré. Par commodité pour le lecteur, nous en redonnons les principaux éléments dans la prochaine sous-section, sachant que les arguments pour définir l'intégrale $I(a)$ dans (2.34) diffèrent du cas centré.

2.4.2 Analyse de Fourier.

Notons à nouveau, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_n(t) := \mathbb{E}[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}].$$

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $b > 0$ tel que, pour tout $\|t\| \geq b$, $\hat{h}(t) = 0$. Rappelons que, d'après la proposition 2.2, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n)] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\|t\| \leq b} \hat{h}(t) E_n(t)\, dt.$$

Considérons maintenant $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, à support inclus dans $\bar{B}(0,R)$, telle que $\chi(t) = 1$ pour $\|t\| \leq \rho$ avec $\rho \in]0, R[$. Alors :

$$(2\pi)^d\, \mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n)] = \int_{\|t\|<R} \chi(t)\, \hat{h}(t)\, E_n(t)\, dt + \int_{\rho<\|t\|\leq b} \big(1-\chi(t)\big)\, \hat{h}(t)\, E_n(t)\, dt$$

Soit $a \in \mathbb{R}^d$. En écrivant l'égalité précédente avec $h_a(\cdot) := h(\cdot - a)$ à la place de h, on obtient avec l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d + \varepsilon)$ que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n - a)]$ converge et que

$$(2\pi)^d \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n - a)] = I(a) + J(a) + K(a) \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad I(a) &= \int_{\|t\|<R} \chi(t)\, \hat{h}(t)\, \frac{\lambda(t)}{1-\lambda(t)}\, L(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt \\ J(a) &= \int_{\|t\|<R} \chi(t)\, \hat{h}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt \\ K(a) &= \int_{\rho<\|t\|\leq b} (1-\chi(t))\, \hat{h}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t)\, e^{-i\langle t,a\rangle}\, dt. \end{aligned}$$

En effet, la remarque 2.3 implique que pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $\|t\| < R$, $t \neq 0$: $|\sum_{n=1}^N \lambda(t)^n| \leq \frac{2}{\alpha\, |w(t)|}$. Comme $\frac{1}{w}$ est intégrable en 0 (cf. Remarque 1.1 page 26), le terme $I(a)$ s'obtient alors avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue. L'existence de $J(a)$ et $K(a)$ résultent des hypothèses de convergence uniforme de l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d + \varepsilon)$.

Le théorème 2.7 s'obtient à partir de l'égalité précédente (2.34) en utilisant les estimations asymptotiques des paragraphes suivants.

2.4.3 Etude asymptotique de $J(a)$ et $K(a)$ et décomposition de $I(a)$.

Commençons par montrer que :

$$J(a) + K(a) = o_{\|a\|\to+\infty}(\|a\|^{-\frac{d-1}{2}}). \tag{2.35}$$

Preuve de (2.35). Posons à nouveau pour simplifier $\mathcal{R}(\cdot) := \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(\cdot)$ et $\mathcal{E}(\cdot) := \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(\cdot)$. Etudions d'abord le comportement asymptotique de $J(a)$ et posons :

$$F(t) := \chi(t)\,\hat{h}(t)\,\mathcal{R}(t) \text{ si } \|t\| < R \text{ et } F(t) := 0 \text{ si } \|t\| \geq R.$$

Remarquons que, par définition de F, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $J(a) = \hat{F}(a)$. Or la fonction $\chi\,\hat{h}$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et est à support compact dans $\bar{B}(0, R)$. En outre, d'après l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$, $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_b^{m_d+\varepsilon}(B(0, R), \mathbb{C})$. Donc $F \in \mathcal{C}_c^{\lfloor m_d+\varepsilon\rfloor}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, F est à support compact dans $\bar{B}(0, R)$, et la restriction de F à la boule ouverte $B(0, R)$ appartient à $\mathcal{C}_b^{m_d+\varepsilon}(B(0, R), \mathbb{C})$. La proposition 1.5 (ii) appliquée avec $u = F$, $m = m_d + \varepsilon$ et $\mathcal{O} = B(0, R)$ nous donne alors l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d,\ \|a\|^{m_d+\varepsilon}|J(a)| \leq C'.$$

Comme $m_d + \varepsilon > \frac{d-1}{2}$, on a bien $J(a) = o_{\|a\|\to+\infty}(\|a\|^{-\frac{d-1}{2}})$.

On procède de même avec $K(a)$ en considérant, à la place de F, la fonction G définie en 0 par $G(0) = 0$, et en dehors de 0 par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\quad G(t) = (1 - \chi(t))\,\hat{h}(t)\,\mathcal{E}(t).$$

Par définition de G, on a : $\forall a \in \mathbb{R}^d,\ K(a) = \hat{G}(a)$. On constate que $G \in C_c^{\lfloor m_d+\varepsilon\rfloor}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, que G est à support compact dans $\bar{K}_{\rho,b} = \{t \in \mathbb{R}^d : \rho \leq \|t\| \leq b\}$, et enfin que la restriction de G à la couronne ouverte $K_{\rho,b}$ appartient à $C_b^{m_d+\varepsilon}(K_{\rho,b}, \mathbb{C})$. La proposition 1.5 (ii) appliquée avec $u = G$, $m = m_d + \varepsilon$ et $\mathcal{O} = K_{\rho,b}$ nous permet de conclure comme précédemment. $\square$

Dans les deux prochaines sous-sections, nous allons étudier le comportement asymptotique de $I(a)$. Remarquons que $I(a)$ s'écrit immédiatement comme somme de trois intégrales :

$$I(a) = I_1(a) + I_2(a) + I_3(a)$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1(a) &:= \int_{\|t\|<R} \chi(t)\,\frac{\hat{h}(t)\lambda(t)\,L(t) - \hat{h}(0)\,L(0)}{1 - \lambda(t)}\,e^{-i\langle t,a\rangle}\,dt \\
I_2(a) &:= \hat{h}(0)\,L(0) \int_{\|t\|<R} \frac{\chi(t)}{-i\|\vec{m}\|t_1 + \frac{1}{2}\langle\Sigma t, t\rangle}\,e^{-i\langle t,a\rangle}\,dt \\
I_3(a) &:= \hat{h}(0)\,L(0) \int_{\|t\|<R} \chi(t)\,\frac{\lambda(t) - 1 - i\|\vec{m}\|t_1 + \frac{1}{2}\langle\Sigma t, t\rangle}{(1 - \lambda(t))(-i\|\vec{m}\|t_1 + \frac{1}{2}\langle\Sigma t, t\rangle)}\,e^{-i\langle t,a\rangle}\,dt.
\end{aligned}$$

2.4.4 Etude asymptotique de $I_1(a)$ et de $I_3(a)$.

Rappelons que $v_0 = 1 - \lambda(\cdot)$. Remarquons que $I_1(\cdot)$ et $I_3(\cdot)$ sont les transformées de Fourier de deux fonctions notées respectivement q_1 et q_3. Posons, pour $t \in B(0,R)$:

$$\theta_1(t) = \chi(t)\big(\hat{h}(t)\lambda(t)\, L(t) - \hat{h}(0)\, L(0)\big).$$

On a :

$$I_1(a) = \widehat{q_1}(a) \quad \text{avec} \;\; q_1 := \frac{\theta_1}{v_0}\, 1_{B(0,R)}, \tag{2.36}$$

Puis posons, pour $t \in B(0,R)$,

$$\theta_3(t) := \chi(t)\left(\lambda(t) - 1 - i\|\vec{m}\|t_1 + \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle\right)$$

et, pour $t \in \mathbb{R}^d$, $\tilde{v}_0(t) = -i\|\vec{m}\|t_1 + \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle$. On a de même :

$$I_3(a) = \widehat{q_3}(a) \quad \text{avec} \;\; q_3 := \frac{\theta_3}{v_0\, \tilde{v}_0}\, 1_{B(0,R)}. \tag{2.37}$$

On a :

$$I_1(a) + I_3(a) = o_{\|a\| \to +\infty}(\|a\|^{-\frac{d-1}{2}}). \tag{2.38}$$

Preuve de (2.38). Les fonctions θ_1 et v_0 vérifient les hypothèses de la proposition 1.7 (cf. Remarque 2.3 pour v_0). De même, les fonctions θ_3, $\tilde{v}_0$ et v_0 vérifient les hypothèses de la proposition 1.8. Par conséquent, (2.38) se déduit de (2.36), (2.37) et des propositions 1.7 et 1.8. □

2.4.5 Etude de $I_2(a)$ et fin de la preuve du théorème 2.7.

Dans cette sous-section, nous démontrons le résultat suivant. *Si $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ vérifie la condition (2.31), alors on a :*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} I_2(a(\tau)) = (2\pi)^{\frac{d+1}{2}}\, C(L, \vec{m}, \Sigma, \Lambda)\; \hat{h}(0). \tag{2.39}$$

Le résultat (2.39) nous permet d'achever la preuve du théorème 2.7 :

Fin de la preuve du théorème 2.7. Grâce à (2.34), le théorème 2.7 s'obtient immédiatement en utilisant (2.35), (2.38) et (2.39). □

La preuve de (2.39) donnée dans [4] repose sur des estimations asymptotiques de " fonctions de Bessel modifiées " et nous renvoie au livre de G. N. Watson [74] dans lequel ces estimations ne sont en fait que partiellement justifiées. Nous proposons ci-dessous une preuve plus directe de (2.39), basée sur la proposition 2.6 suivante. Rappelons que $S(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de Schwartz usuel.

Proposition 2.6. *Soient $\vec{w} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ telle que $\Theta := \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, \phi(\tau) \in \mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $k \in S(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(u)\, e^{-i\langle u, \tau\vec{w}+\phi(\tau)\rangle}}{-i\langle \vec{w}, u\rangle + \|u\|^2}\, du = 2\frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\|\vec{w}\|}\, k(0)\, e^{-\frac{\|\Theta\|^2\|\vec{w}\|^2 - \langle\Theta,\vec{w}\rangle^2}{4\|\vec{w}\|^2}}.$$

La preuve de la proposition 2.6, présentée dans la prochaine sous-section, utilise aussi les résultats des propositions 1.7-1.8 du chapitre 1. Nous allons maintenant appliquer le résultat de la proposition 2.6, admise donc provisoirement, pour établir (2.39).

Preuve de (2.39). Comme $\vec{m} = \|\vec{m}\|\vec{e_1}$, (2.31) s'écrit aussi : $a(\tau) = \tau\, \|\vec{m}\|\vec{e_1} + \sqrt{\tau}\, r(\tau)$ avec $r(\tau)$ tel que $\Lambda := \lim_{\tau\to+\infty} r(\tau)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres strictement positives de Σ. Soient $\Delta := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d})$ et P une matrice orthogonale $d \times d$ telle que

$$P^{-1}\Sigma P = \Delta^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d).$$

Remarquons que $\langle \Sigma t, t\rangle = \langle \Delta^2 P^{-1} t, P^{-1} t\rangle = \|\Delta P^{-1} t\|^2$. Posons $L = \Delta^{-1}\, P^{-1}\, \vec{e_1}$. En utilisant le changement de variable : $t = P\Delta^{-1} u$, on obtient que

$$I_2(a) = 2\hat{h}(0)\, L(0)\, (\det \Delta)^{-1} \int \frac{\chi(P\Delta^{-1}u) e^{-i\langle \Delta^{-1}u, P^{-1}\, a\rangle}}{-i\langle 2\|\vec{m}\| L, u\rangle + \|u\|^2}\, du.$$

car $t_1 = \langle P\Delta^{-1}u, \vec{e_1}\rangle = \langle u, L\rangle$.
Posons $\zeta(x) = \chi(P\Delta^{-1}x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, et $\phi(\tau) = \sqrt{2\tau}\, \Delta^{-1}\, P^{-1}\, r(2\tau)$, $\tau > 0$. De l'égalité $\langle \Delta^{-1}u, P^{-1}\, \|m\|\vec{e_1}\rangle = \|m\|\langle u, L\rangle$, il vient que

$$\begin{aligned} I_2(a(\tau)) &= 2\hat{h}(0)\, L(0)\, (\det \Delta)^{-1} \int \frac{\chi(P\Delta^{-1}u) e^{-i\langle \Delta^{-1}u, P^{-1}(\tau\, \|\vec{m}\|\vec{e_1} + \sqrt{\tau}.\, r(\tau))\rangle}}{-i\langle 2\|m\| L, u\rangle + \|u\|^2}\, du \\ &= 2\hat{h}(0)\, L(0)\, (\det \Delta)^{-1} \int \frac{\zeta(u) e^{-i\langle u, \frac{\tau}{2}.2\|m\|L + \phi(\frac{\tau}{2})\rangle}}{-i\langle 2\|m\| L, u\rangle + \|u\|^2}\, du \end{aligned}$$

Comme $\Delta^{-1} = P^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}P$, on a $L = P^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{e_1}$, d'où $\|L\| = \|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{e_1}\|$ et $\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\| = \|m\|\|L\|$. De plus, $\zeta(0) = \chi(0) = 1$ et

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, \phi(\tau) = \sqrt{2}\, \Delta^{-1} P^{-1}\Lambda = \sqrt{2}\, P^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda.$$

La proposition 2.6 avec $k = \zeta \in S(\mathbb{R}^d)$, $\vec{w} = 2\|m\|L = 2P^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}$ et $\Theta = \sqrt{2}\, P^{-1}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda$ nous donne finalement :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{d-1}{2}} I_2(a(\tau)) = 2\hat{h}(0)\, L(0)\, (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}}\, \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|}\, \zeta(0) e^{-\frac{\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|^2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda\|^2 - \langle \Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}, \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda\rangle^2}{2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|^2}},$$

c'est-à-dire (2.39). □

2.4.6 Preuve de la proposition 2.6.

Soit U une isométrie de $\mathbb{R}^d$ telle que $U(\vec{w}) = \|\vec{w}\|\vec{e_1}$. Soit $\tau \in \mathbb{R}^+$. Le changement de variable $v = (v_1, v') = U(u)$ dans l'intégrale de la proposition 2.6 conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(u)\, e^{-i\langle u, \tau\vec{w}+\phi(\tau)\rangle}}{-i\langle \vec{w}, u\rangle + \|u\|^2}\, du = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(U^{-1}(v))\, e^{-i\tau\|\vec{w}\|v_1} e^{-i\langle v, U(\phi(\tau))\rangle}}{-i\|\vec{w}\|v_1 + \|v\|^2}\, dv,$$

Comme U est linéaire continue sur $\mathbb{R}^d$, on a, par hypothèse, $\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} U(\phi(\tau)) = U(\Theta)$. Posons $U(\Theta) := (L_1, L')$ avec $L_1 \in \mathbb{R}$ et $L' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Comme U est une isométrie, $\|U(\Theta)\| = \|\Theta\|$ et $L_1 = \langle U(\Theta), \vec{e_1}\rangle = \langle \Theta, U^{-1}(\vec{e_1})\rangle = \frac{1}{\|\vec{w}\|}\langle \Theta, \vec{w}\rangle$. Ainsi

$$\|L'\|^2 = \|\Theta\|^2 - \frac{1}{\|\vec{w}\|^2}\langle \Theta, \vec{w}\rangle^2 = \frac{\|\vec{w}\|^2\|\Theta\|^2 - \langle \Theta, \vec{w}\rangle^2}{\|\vec{w}\|^2}.$$

Notons maintenant $U(\phi(\tau)) := \varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \cdots, \varphi_d(\tau))$ et $\psi(\tau) = (\varphi_2(\tau), \cdots, \varphi_d(\tau))$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(u) e^{-i\langle u, \tau\vec{w}+\phi(\tau)\rangle}}{-i\langle \vec{w}, u\rangle + \|u\|^2}\, du = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(U^{-1}(v))\, e^{-i(\tau\|\vec{w}\|+\varphi_1(\tau))v_1} e^{-i\langle \psi(\tau), v'\rangle}}{-i\|\vec{w}\|v_1 + \|v\|^2}\, dv.$$

Finalement, comme $k \circ U^{-1} \in S(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau}\varphi_1(\tau) = 0$ et $\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\psi(\tau) = L'$, la proposition 2.6 résulte directement de la proposition 2.7 ci-dessous. $\square$

Proposition 2.7. *Soient $\mu \in \mathbb{R}^*$, $L' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\varphi_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau} = 0$ et $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d-1}$ telle que $\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\tau}} = L'$. Alors, pour tout $h \in S(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{h(v)\, e^{-i(\tau\mu+\varphi_1(\tau))v_1} e^{-i\langle \psi(\tau), v'\rangle}}{-i\mu v_1 + \|v\|^2}\, dv \;=\; \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{\|L'\|^2}{4}}}{|\mu|} h(0).$$

Preuve de la proposition 2.7. Posons : $H(v) = e^{-\frac{\mu^2 v_1^2}{2}} e^{-\frac{\|v'\|^4}{2}}$, $v = (v_1, v') \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 2.10. *La proposition 2.7 est vraie avec $h = H$, c'est-à-dire que :*

$$I_\mu(\tau) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\frac{\mu^2 v_1^2}{2}} e^{-\frac{\|v'\|^4}{2}}\; e^{-i(\tau\mu+\varphi_1(\tau))v_1} e^{-i\langle \psi(\tau), v'\rangle}}{-i\mu v_1 + \|v'\|^2}\, dv \;\sim_{\tau\to+\infty}\; \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{\|L'\|^2}{4}}}{|\mu|\,\tau^{\frac{d-1}{2}}}.$$

Admettons pour le moment la validité du lemme 2.10. Pour déduire la proposition 2.7 de ce cas particulier, nous allons procéder par différence et utiliser les propositions 1.7-1.8. Posons :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{h(v)\, e^{-i(\tau\mu+\varphi_1(\tau))v_1} e^{-i\langle \psi(\tau), v'\rangle}}{-i\mu v_1 + \|v\|^2}\, dv - h(0) I_\mu(\tau) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\tau\mu+\varphi_1(\tau))v_1} e^{-i\langle \psi(\tau), v'\rangle}\, \Delta(v) dv,$$

avec, pour $v \neq 0$

$$\Delta(v) := \frac{h(v) - h(0)H(v)}{-i\mu v_1 + \|v\|^2} - h(0)\frac{v_1^2 H(v)}{(-i\mu v_1 + \|v\|^2)(-i\mu v_1 + \|v'\|^2)}. \tag{2.40}$$

Posons pour $\tau \in \mathbb{R}^+$:

$$a(\tau) = (\tau\mu + \varphi_1(\tau))\vec{e_1} + \sum_{k=2}^{d} \varphi_k(\tau)\vec{e_k}.$$

Par hypothèse sur $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \cdots, \varphi_d(\cdot))$, on a

$$\|a(\tau)\| \sim_{\tau\to+\infty} |\mu|\tau. \tag{2.41}$$

D'après le lemme 2.10, il nous reste à prouver que

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle v, a(\tau)\rangle}\, \Delta(v)dv = 0. \tag{2.42}$$

Considérons θ_1 et $\theta_2 \in S(\mathbb{R}^d)$ définies par :

$$\theta_1(v) = h(v) - h(0)H(v) \quad \text{et} \quad \theta_2(v) = v_1^2 H(v).$$

On vérifie facilement que $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, puis que

$$\forall j \in \{1, \ldots, d\}, \quad (\partial_j\theta_2)(0) = 0\,, \quad (\partial_1^2\theta_2)(0) = 2,$$

et

$$\forall (j,\ell) \in \{1, \ldots, d\}^2 \setminus \{(1,1)\}, \quad (\partial_{j\ell}^2\,\theta_2)(0) = 0,$$

où l'on a noté $\partial_{j\ell}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell}$. Considérons maintenant $\chi \in S(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(0) = -\frac{1}{\mu^2}$ et posons, si $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$s(v) = (-i\mu v_1 + \|v\|^2)(-i\mu v_1 + \|v'\|^2)\chi(v),$$

avec $v' = (v_2, \ldots, v_d)$. On vérifie aussi facilement que $s(0) = 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, d\}$, $(\partial_j s)(0) = 0$, $(\partial_1^2 s)(0) = -2\mu^2\chi(0) = 2$ et $\forall (j,l) \in \{1, \ldots, d\}^2 \setminus \{(1,1)\}$, $(\partial_{jl}^2 s)(0) = 0$.
Donc les dérivées partielles premières et secondes de la fonction $\theta_3 := \theta_2 - s$ sont nulles en 0. Pour $v \neq 0$, écrivons $\Delta(v)$ comme suit :

$$\Delta(v) = \frac{\theta_1(v)}{-i\mu v_1 + \|v\|^2} - h(0)\frac{\theta_3(v)}{(-i\mu v_1 + \|v\|^2)(-i\mu v_1 + \|v'\|^2)} - h(0)\chi(v).$$

Soient B une boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ tels que $\forall x \in B$, $\gamma(x) = 1$. Comme $\widehat{\gamma\chi} \in S(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{\tau\to+\infty} \|a(\tau)\| = +\infty$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \|a(\tau)\|^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle v, a(\tau)\rangle}\, \gamma(v)\chi(v)dv = 0 \tag{2.43}$$

Les propriétés en 0 des deux fonctions θ_1 et θ_3, indiquées ci-dessus, nous permettent d'utiliser la proposition 1.7 avec $\theta = \gamma\theta_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et la proposition 1.8 avec $\theta = \gamma\theta_3 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ce qui nous donne :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \|a(\tau)\|^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle v, a(\tau)\rangle}\, \frac{\gamma(v)\theta_1(v)}{-i\mu v_1 + \|v\|^2} dv = 0, \tag{2.44}$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \|a(\tau)\|^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle v,a(\tau)\rangle} \frac{\gamma(v)\theta_3(v)}{(-i\mu v_1+\|v\|^2)(-i\mu v_1+\|v'\|^2)}dv = 0. \tag{2.45}$$

Ainsi, grâce à (2.41), on a :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle v,a(\tau)\rangle} \gamma(v)\Delta(v)dv = 0. \tag{2.46}$$

Comme la fonction $1-\gamma$ s'annule sur une boule fermée B centrée en 0, la fonction $(1-\gamma)\Delta$ est dans l'espace $S(\mathbb{R}^d)$ car toutes les dérivées partielles de $1-\gamma$ sont bornées sur $\mathbb{R}^d$ et Δ est définie sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ comme le quotient d'une fonction de $S(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction polynômiale (cf. (2.40)). La transformée de Fourier de $(1-\gamma)\Delta$ est aussi dans $S(\mathbb{R}^d)$ et on a donc :

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle v,a(\tau)\rangle} (1-\gamma(v))\Delta(v)dv = 0. \tag{2.47}$$

Ainsi (2.42) résulte de (2.46) et de (2.47). □

Preuve du lemme 2.10. Il suffit de prouver le lemme 2.10 avec $\mu=1$. Le cas général s'obtient en effectuant le changement de variable $w_1=\mu v_1$, $w'=v'$ dans l'intégrale $I_\mu(\tau)$. Comme

$$\int_0^{+\infty} v_1^{-\frac{3}{4}} \exp(-\frac{v_1^2}{2})\, dv_1 < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \|v'\|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{\|v'\|^4}{2})\, dv' < +\infty,$$

le théorème de Fubini-Tonelli nous donne l'existence de $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(-\frac{v_1^2}{2})\exp(-\frac{\|v'\|^4}{2})}{|-iv_1+\|v'\|^2|}\, dv$ (cf. Remarque 1.1 page 26). Rappelons maintenant la formule bien connue suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall b\in\mathbb{R}^n,\quad (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x\|^2}{2}} e^{-i\langle b,x\rangle}dx = e^{-\frac{\|b\|^2}{2}}, \tag{2.48}$$

et remarquons que, si $v'\neq 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{(iv_1-\|v'\|^2)u}du = \frac{1}{-iv_1+\|v'\|^2}. \tag{2.49}$$

En utilisant (2.49), le théorème de Fubini et (2.48), on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle\psi(\tau),v'\rangle} e^{-\frac{\|v'\|^4}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\tau+\varphi_1(\tau))v_1} e^{-\frac{v_1^2}{2}}}{-iv_1+\|v'\|^2} dv_1 \right) dv' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle\psi(\tau),v'\rangle} e^{-\frac{\|v'\|^4}{2}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\|v'\|^2 u} \Big[\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\tau+\varphi_1(\tau)-u)v_1} e^{-\frac{v_1^2}{2}} dv_1 \Big] du \right) dv' \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle\psi(\tau),v'\rangle} e^{-\frac{\|v'\|^4}{2}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\|v'\|^2 u} e^{-\frac{(\tau+\varphi_1(\tau)-u)^2}{2}} du \right) dv'.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'égalité immédiate suivante :

$$\|v'\|^2 u + \frac{1}{2}(\tau+\varphi_1(\tau)-u)^2 = \frac{1}{2}\big[(u+\|v'\|^2-(\tau+\varphi_1(\tau)))^2 - \|v'\|^4 + 2(\tau+\varphi_1(\tau))\|v'\|^2\big],$$

et en effectuant (pour τ assez grand) le changement de variable $y' = \sqrt{2(\tau+\varphi_1(\tau))}\,v'$ afin d'obtenir la dernière égalité ci-dessous, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{I_1(\tau)}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle\psi(\tau),v'\rangle} e^{-(\tau+\varphi_1(\tau))\|v'\|^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u+\|v'\|^2-(\tau+\varphi_1(\tau)))^2)} du\right) dv' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle\psi(\tau),v'\rangle} e^{-(\tau+\varphi_1(\tau))\|v'\|^2} \left(\int_{\|v'\|^2-(\tau+\varphi_1(\tau))}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) dv' \\
&= \big(2(\tau+\varphi_1(\tau))\big)^{-\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{2(\tau+\varphi_1(\tau))}}, y'\rangle - \frac{\|y'\|^2}{2}} \left(\int_{\frac{|y'|^2}{2(\tau+\varphi_1(\tau))}-(\tau+\varphi_1(\tau))}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) dy'
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\tau+\varphi_1(\tau) \sim_{\tau\to+\infty} \tau$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue et (2.48) donnent

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{\frac{d-1}{2}} I_1(\tau) &= \sqrt{2\pi}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle\frac{L'}{\sqrt{2}},y'\rangle}\, e^{-\frac{\|y'\|^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) dy' \\
&= \sqrt{2\pi}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{d-1} \sqrt{2\pi}\,(\sqrt{2\pi})^{d-1} e^{-\frac{\|L'\|^2}{4}} = 2\pi^{\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{\|L'\|^2}{4}},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la propriété souhaitée pour $I_1(\tau)$. □

2.5 Extension des théorèmes de renouvellement au cas lattice

Considérons comme précédemment une suite $(X_n, S_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$, où $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable. On suppose dans cette section qu'il existe un sous-groupe fermé $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}\big(S_n \in \mathbb{S}\big) = 1. \tag{2.50}$$

Quitte à se placer dans $\mathbb{R}^{d'}$ avec $d' < d$, on peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{S}$ est de dimension d (i. e. le sous-espace engendré par $\mathbb{S}$ est $\mathbb{R}^d$). Puisque $\mathbb{S}$ est supposé fermé, que $\mathbb{S}$ s'écrit donc sous la forme $\mathbb{S} = \mathbb{Z}\cdot\vec{v}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\cdot\vec{v}_p \,\oplus\, H$, avec $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ linéairement indépendants, et avec H un sous-espace vectoriel (s.e.v) de dimension $d-p$. En considérant une base orthonormée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ du s.e.v. orthogonal de H, on peut encore écrire $\mathbb{S}$ sous la forme

$$\mathbb{S} = A\big(\mathbb{Z}\cdot\vec{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\cdot\vec{e}_p\big) \oplus H, \tag{2.51}$$

où A est une matrice réelle inversible d'ordre d. Il est alors facile de voir que

$$\mathbb{S}^* := \big\{t \in \mathbb{R}^d \ :\ \forall s \in \mathbb{S},\ \langle t, s\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\big\} = 2\pi\,(A^*)^{-1}\big(\mathbb{Z}\cdot\vec{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\cdot\vec{e}_p\big),$$

où A^* est la matrice transposée de A. En particulier $\mathbb{S}^*$ est un sous-groupe discret.

Soit $f : E \to [0, +\infty[$ une fonction mesurable vérifiant (2.1). On a vu que le point de départ des preuves de tous les théorèmes de renouvellement précédents (en toute dimension, dans le cas centré ou décentré) est l'étude des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)\,h(S_n)]$, ou bien

$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1} \mathbb{E}[f(X_n)\, h(S_n)]$ avec $r \in]0,1[$ en dimension $d=1$, pour les fonctions h de $\mathcal{H}_k(d)$, avec k convenablement choisi. Pour $h \in \mathcal{H}_k(d)$ et $t \in \mathbb{R}^d$, posons :

$$H(t) := \sum_{g \in \mathbb{S}^*} \hat{h}(t+g).$$

En appliquant la proposition 2.2, et en remarquant que la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}]$ est $\mathbb{S}^*$-périodique, on obtient :

$$\mathbb{E}\big[f(X_n)\, h(S_n)\big] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{D}^*} H(t)\, \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}\big]\, dt, \tag{2.52}$$

où $\mathcal{D}^*$ est un domaine fondamental du groupe quotient $\mathbb{R}^d/\mathbb{S}^*$. À partir de (2.52), on peut reproduire toutes les preuves des sections précédentes. À cet effet, on conserve la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$, mais la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ doit être remplacée par la suivante :

Condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$. *Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$ d'adhérence contenue dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^*$, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$ converge uniformément dans U vers une fonction de $\mathcal{C}_b^m\big(U, \mathbb{C}\big)$.*

Les démonstrations des sections précédentes peuvent alors être reprises de manière identique, à la différence près suivante : le terme $\hat{h}(0)$ dans la limite est remplacé par

$$H(0) = \sum_{g \in \mathbb{S}^*} \hat{h}(g),$$

qui, d'après la formule sommatoire de Poisson, est égal à $c_{\mathbb{S}}\, m_{\mathbb{S}}(h)$, où $m_{\mathbb{S}}(\cdot)$ désigne la mesure de Haar sur $\mathbb{S}$ et $c_{\mathbb{S}}$ est une constante strictement positive ne dépendant que du groupe $\mathbb{S}$. En conséquence on dispose du résultat suivant :

Théorèmes de renouvellement dans le cas lattice. *Soit $\mathbb{S}$ un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^d$ de dimension d tel que l'on ait la propriété (2.50). Sous les hypothèses (respectives) des théorèmes 2.1, 2.4 et 2.6, mais avec la condition $\mathcal{R}'_d(m_d+\varepsilon)(ii)$ à la place de $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)(i)$, les conclusions (respectives) de ces théorèmes sont vérifiées avec la mesure $c_{\mathbb{S}}\, m_{\mathbb{S}}(\cdot)$ à la place de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}_d(\cdot)$ sur $\mathbb{R}^d$.*

Le cas $\mathbb{S} = \mathbb{R}^d$ est celui traité dans les sections précédentes : on a $\mathbb{S}^* = \{0\}$, les conditions $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)(i)$ et $\mathcal{R}'_d(m_d+\varepsilon)(ii)$ coïncident, et $m_{\mathbb{S}}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Dans le cas général (2.51), la mesure de Haar sur $\mathbb{S}$ est le produit de la mesure de comptage sur $A\mathbb{Z}^p$ et de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d-p}$. Le cas lattice classique est $\mathbb{S} = \mathbb{Z}^d$, et dans ce cas $\mathbb{S}^* = 2\pi\, \mathbb{Z}^d$ et $m_{\mathbb{S}}(\cdot)$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}^d$.

Dans le cas i.i.d, la convergence uniforme dans la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ est vérifiée sous l'hypothèse qu'il n'existe pas de sous-groupe propre $\mathbb{S}_0$ de $\mathbb{S}$ tel que l'on ait : $\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}\big(S_n \in \mathbb{S}_0\big) = 1$. Autrement dit, le groupe $\mathbb{S}$ de (2.50) est minimal au sens de l'inclusion. On verra que ce type de réduction peut être aussi obtenu dans le contexte markovien des chapitres 4 et 5.

Chapitre 3

Opérateur fortement ergodique. Théorème de perturbation

Dans ce chapitre, on présente les outils d'analyse fonctionnelle qui seront appliqués au chapitre 4 pour développer la méthode spectrale de Nagaev-Guivarc'h dans le cadre des chaînes de Markov. Dans la première section de ce chapitre, on introduit l'hypothèse de forte ergodicité : un endomorphisme continu T sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ est dit fortement ergodique si ses itérés convergent, en norme d'opérateurs sur $\mathcal{B}$, vers un projecteur de rang 1. Cette définition est illustrée dans la deuxième section dans le cas des matrices stochastiques, d'autres exemples seront détaillés dans un contexte plus probabiliste au chapitre suivant. Dans la section 3, on démontre le théorème standard de perturbations d'opérateurs dans le cas particulier des opérateurs fortement ergodiques. Les outils fonctionnels présentés dans ce chapitre seront repris dans le cadre plus complexe du théorème de perturbation de Keller-Liverani du chapitre 5.

Les notations générales utilisées dans ce chapitre sont les suivantes : on note $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe et on désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ l'algèbre de Banach des endomorphismes continus de $\mathcal{B}$ muni de la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, notée encore $\|\cdot\|$. On désigne par $\mathcal{B}' = \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ le dual topologique de $\mathcal{B}$. Enfin Id est l'opérateur identité sur $\mathcal{B}$.

3.1 Opérateur fortement ergodique.

Le lemme suivant montre que si la suite des itérés d'un endomorphisme continu de $\mathcal{B}$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, cette suite converge à vitesse géométrique vers un projecteur.

Lemme 3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que la suite $(T^n)_n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Alors $\Pi := \lim_{n\to+\infty} T^n$ est un projecteur de $\mathcal{L}(B)$ et il existe $c > 0$ et $\rho \in [0, 1[$ tel que $\forall n \geq 1$, $\|T^n - \Pi\| \leq c\rho^n$.*

Démonstration. On vérifie facilement par passage à la limite que $T\Pi = \Pi T = \Pi = \Pi^2$ et que $\forall n \geq 1$, $T^n - \Pi = (T - \Pi)^n$. Considérons alors $r \in [0, 1[$ et $n_0 \geq 2$ tels que $\|T^{n_0} - \Pi\| \leq r$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit k (resp. j) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de n par n_0.

On a alors :

$$\|T^n - \Pi\| = \|(T-\Pi)^n\| \leq \|(T-\Pi)^{n_0}\|^k \|T-\Pi\|^j.$$

Soit $M = \max_{j \in \{0, \cdots, n_0-1\}} \|T-\Pi\|^j$. On obtient que $\forall n \geq 1,\ \|T^n - \Pi\| \leq \frac{M}{r}(r^{\frac{1}{n_0}})^n$. $\square$

Définition 3.1. `[Opérateur fortement ergodique.]`
Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. On dit que T est fortement ergodique si la suite $(T^n)_n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ vers un projecteur de rang 1.

Remarque 3.1. *Le lemme 3.1 nous permet de préciser la définition précédente. Supposons T fortement ergodique et reprenons les notations du lemme 3.1. Soit $e \in \Pi(\mathcal{B}) \setminus \{0\}$ tel que* $\operatorname{Im}\Pi = \mathbb{C}\cdot e$. *Comme Π est linéaire, il existe $\pi(\cdot) \in \mathcal{B}'$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \Pi(f) = \pi(f)e,$$

et on a en particulier $\pi(e) = 1$ car $\Pi(e) = e$. Par conséquent la condition de forte ergodicité s'exprime aussi comme suit : $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ est fortement géométrique si et seulement si il existe $e \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, $\pi \in \mathcal{B}'$ tel que $\pi(e) = 1$, puis des constantes $c > 0$ et $\rho \in [0,1[$, tels que

$$\forall n \geq 1, \forall f \in \mathcal{B},\ \|T^n f - \pi(f)e\| \leq c\rho^n \|f\|. \tag{3.1}$$

Remarque 3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ vérifiant (3.1).*
- On a $Te = e$. En effet, $\lim_n T^n e = e$ et par continuité de T en e,

$$e = \lim_n T^{n+1}e = \lim_n T(T^n e) = T(\lim_n T^n e) = Te.$$

- Le nombre 1 est donc une valeur propre de T, et on a en outre : $\operatorname{Ker}(T - Id) = \mathbb{C}e$. *En effet, pour tout $f \in \operatorname{Ker}(T - Id)$, on a*

$$f = \lim_n T^n f = \pi(f)\, e.$$

- On a $\pi \circ T = \pi$. En effet, comme $\pi \in \mathcal{B}'$ et $\pi(e) = 1$, on a pour tout $f \in \mathcal{B}$: $\lim_n \pi(T^n f) = \pi(\pi(f)e) = \pi(f)$. *En considérant Tf à la place de f dans l'égalité précédente, on obtient :* $\pi(Tf) = \lim_n \pi(T^n(Tf)) = \lim_n \pi(T^{n+1}f) = \pi(f)$.

On étudie maintenant le spectre d'un opérateur fortement ergodique. À cet effet on rappelle que si $U \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ est une bijection de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$, son inverse U^{-1} (i.e. la bijection réciproque de U) est aussi dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ d'après le théorème de Banach.

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. On note

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{C},\ zId - T \text{ inversible}\}$$

l'ensemble résolvant de T, et on note $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ le spectre de T. Rappelons que $\sigma(T)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$ et que le rayon spectral de T, $r(T) := \sup\{|z|,\ z \in \sigma(T)\}$, est aussi égal, d'après la formule du rayon spectral, à :

$$r(T) = \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{3.2}$$

Les définitions ci-dessus sont précisées dans la sous-section 3.4, en particulier la formule précédente est démontrée dans le lemme 3.6. L'énoncé (et la preuve) de la proposition suivante fait uniquement appel aux définitions de $\rho(T)$ et $\sigma(T)$.

Proposition 3.1. `[Spectre d'un opérateur fortement ergodique.]`
Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ vérifiant (3.1). Alors $\sigma(T) \subset \overline{D}(0,\rho) \cup \{1\}$, et en particulier $r(T) = 1$.

Démonstration. Commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{B}$, stables par T, tels que $\mathcal{B} = F \oplus G$. Alors $\sigma(T) \subset \sigma(T_F) \cup \sigma(T_G)$, où T_F (resp. T_G) est l'endomorphisme induit par T sur F (resp. sur G).*

Démonstration. Comme F (resp. G) est fermé, $(F, \|\cdot\|)$ (resp. $(G, \|\cdot\|)$) est un espace de Banach. Montrons que $\rho(T_F) \cap \rho(T_G) \subset \rho(T)$. Soit $\lambda \in \rho(T_F) \cap \rho(T_G)$. Notons $U \in \mathcal{L}(F)$ (resp. $V \in \mathcal{L}(G)$) l'inverse de $T_F - \lambda Id_F$ (resp. de $T_G - \lambda Id_G$) et $p_F : E \to F$, $p_G : E \to G$ les projections canoniques. Une vérification élémentaire montre que $T - \lambda Id$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, d'inverse $U \circ p_F + V \circ p_G \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Donc $\lambda \in \rho(T)$. □

Soit maintenant $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ vérifiant (3.1). Pour tout $f \in \mathcal{B}$, on a : $f = (f - \pi(f)\, e) + \pi(f)\, e$. D'où $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} \pi \oplus \mathbb{C} \cdot e$. De plus, $\operatorname{Ker} \pi$ et $\mathbb{C} \cdot e$ sont deux s.e.v de $\mathcal{B}$, fermés et stables par T par la remarque 3.2. D'après les propriétés (3.1) et (3.2), le rayon spectral $r(T_{\operatorname{Ker} \pi})$ est inférieur ou égal à ρ car $\forall n \geq 1$, $\|T^n_{\operatorname{Ker} \pi}\| \leq c\rho^n$. Donc $\sigma(T_{\operatorname{Ker} \pi}) \subset \overline{D}(0,\rho)$. Comme $\sigma(T_{\mathbb{C} \cdot e}) = \{1\}$, on obtient $\sigma(T) \subset \overline{D}(0,\rho) \cup \{1\}$ par le lemme 3.2. □

Remarque 3.3. `[Opérateur uniformément ergodique.]`
$T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ est dit uniformément ergodique lorsque la suite de ses itérés converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ au sens de Cesaro. L'hypothèse de forte ergodicité implique évidemment celle d'uniforme ergodicité. Il est facile de voir que, si T est uniformément ergodique, alors la limite de la suite des moyennes de ses itérés est un projecteur sur $\mathcal{B}$.

3.2 Exemple : cas des matrices stochastiques.

Les résultats de cette section sont classiques. Les preuves présentées ici mettent l'accent sur des hypothèses spectrales, qui illustrent bien les définitions et propriétés de la section précédente.

3.2.1 Matrice stochastique et opérateur de transition associé.

Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_K(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre K à coefficients réels. Soient $E = \{1, \cdots, K\}$ et $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions de E dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $f \in \mathcal{B}$ par :

$$\|f\|_\infty = \max(|f(1)|, \ldots, |f(K)|).$$

On vérifie facilement que $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach. La norme de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{B}$ est aussi notée $\|\cdot\|_\infty$. Rappelons quelques définitions classiques :

Définition 3.2.
1. Soit $Q := (q(i,j)) \in \mathcal{M}_K(\mathbb{R})$. On dit que Q est stochastique si

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,K\}^2,\ q(i,j) \in \mathbb{R}^+ \quad et \quad \forall i \in \{1,\ldots,K\},\ \sum_{j=1}^{K} q(i,j) = 1.$$

2. Soit $Q \in \mathcal{M}_K(\mathbb{R})$, stochastique. L'opérateur de transition sur E associé à Q, noté encore Q, associe à toute fonction f de $\mathcal{B}$ la fonction Qf de $\mathcal{B}$ définie par :

$$\forall i \in E,\ (Qf)(i) = \sum_{j=1}^{K} q(i,j) f(j).$$

Sauf mention contraire, dans la suite de cette section, on désigne par Q une matrice stochastique de $\mathcal{M}_K(\mathbb{R})$.

Remarque 3.4.
1. Pour tout $f \in \mathcal{B}$, $\|Qf\|_\infty \le \|f\|_\infty$ (i. e. $\|Q\|_\infty \le 1$).
2. D'après la remarque précédente, les valeurs propres complexes de Q sont de module inférieur ou égal à 1.
3. Soit 1_E la fonction de $\mathcal{B}$ telle que $\forall k \in E$, $1_E(k) = 1$. Le réel 1 est une valeur propre de Q car $Q1_E = 1_E$.
4. Notons $\mathcal{B}^+ = \{f \in \mathcal{B}, \forall i \in E,\ f(i) \ge 0\}$. Pour tout $f \in \mathcal{B}^+$, $Qf \in \mathcal{B}^+$. En d'autres termes, Q est un opérateur positif de $\mathcal{B}$.

3.2.2 Probabilité Q-invariante.

Notons $\mathcal{P} = \{(p_1,\ldots,p_K) \in (\mathbb{R}^+)^K / p_1 + \ldots + p_K = 1\}$ l'ensemble des (vecteurs de) probabilité(s) sur E. Rappelons la définition d'une probabilité Q-invariante.

Définition 3.3. *Soit $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_K) \in \mathcal{P}$. On dit que π est Q-invariante si $\pi Q = \pi$, i.e. si et seulement si*

$$\forall i \in \{1,\ldots,K\}, \quad \pi_i = \sum_{k=1}^{K} q(k,i)\pi_k.$$

Proposition 3.2. *Il existe au moins une probabilité $\pi \in \mathcal{P}$, Q-invariante.*

Démonstration. Comme 1 est une valeur propre de Q (cf. Rem. 3.4), 1 est aussi valeur propre de la matrice transposée Q^* de Q. Soit $U \in \mathbb{R}^K$ (vecteur colonne), $U \neq 0$, tel que $Q^*U = U$. Notons $u_1,\ldots,u_K$ les composantes de U. On a, pour tout $i \in \{1,\ldots,K\}$, $u_i = \sum_{k=1}^{K} q(k,i)u_k$ et donc

$$|u_i| \le \sum_{k=1}^{K} q(k,i)|u_k|. \tag{3.3}$$

Q étant stochastique, on a en outre :

$$\sum_{i=1}^{K} |u_i| = \sum_{k=1}^{K} |u_k| = \sum_{k=1}^{K} \Big(\sum_{i=1}^{K} q(k,i) \Big) |u_k| = \sum_{i=1}^{K} \Big(\sum_{k=1}^{K} q(k,i)|u_k| \Big) \tag{3.4}$$

Les propriétés (3.3) et (3.4) impliquent que, pour tout $i \in \{1, \ldots, K\}$, $|u_i| = \sum_{k=1}^{K} q(k,i)|u_k|$. Posons alors $s := \sum_{i=1}^{K} |u_i| > 0$ et $\pi_k = \frac{u_k}{s}$, $k \in \{1, \ldots, K\}$. Alors $\pi := (\pi_1, \ldots, \pi_K) \in \mathcal{P}$ et la probabilité π est Q-invariante d'après ce qui précède. □

3.2.3 Forte ergodicité de Q.

Commençons par redémontrer un résultat plus faible de convergence :

Proposition 3.3. *L'opérateur de transition Q est uniformément ergodique sur $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que

$$\mathcal{B} = \mathrm{Ker}(Q - Id) \oplus \mathrm{Im}\ (Q - Id).$$

Il suffit pour cela de vérifier, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Ker}(Q-Id) \cap \mathrm{Im}\ (Q-Id) = \{0\}$. Soient $f \in \mathrm{Ker}(Q - Id) \cap \mathrm{Im}\ (Q - Id)$ et $g \in \mathcal{B}$ tel que $f = Qg - g$. On montre facilement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kf = Q^k g - g$. On déduit alors de la remarque 3.4 que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k\|f\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty.$$

Ce qui implique $f = 0$ et démontre la propriété souhaitée.
On désigne maintenant par Π_1 (resp. Π_2) la projection sur $\mathrm{Ker}(Q-Id)$ (resp. sur $\mathrm{Im}\ (Q-Id)$) de direction $\mathrm{Im}\ (Q-Id)$ (resp. $\mathrm{Ker}(Q-Id)$), et on définit les opérateurs suivants pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{1}{n}\big(Id + Q + \ldots + Q^{n-1}\big).$$

Il s'agit de démontrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ vers Π_1. Soit $f \in \mathcal{B}$. Écrivons $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 = \Pi_1(f)$ et $f_2 = \Pi_2(f)$. On a $T_n(f_1) = f_1$ car $Qf_1 = f_1$, et d'après ce qui précède, on sait que $Q - Id$ induit une bijection sur $\mathrm{Im}\ (Q - Id)$, d'inverse notée U_2. Soit $w := U_2 f_2$, donc $f_2 = Qw - w$. Alors on a $T_n(f_2) = \frac{1}{n}(Q^n w - w)$. Comme $\|Q\|_\infty \leq 1$, on en déduit que

$$\|T_n(f) - f_1\|_\infty = \|T_n(f_2)\|_\infty \leq \frac{1}{n}\|Q^n w - w\|_\infty \leq 2\|w\|_\infty/n,$$

et par continuité de U_2 et Π_2, il existe une constante $C > 0$ indépendante de f telle que $\|w\|_\infty = \|U_2\Pi_2(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. D'où le résultat. □

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur Q impliquant l'unicité de la probabilité Q-invariante et la forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}$.

Théorème 3.1. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) 1 est valeur propre simple de Q et est l'unique valeur propre de module 1 de Q.

(ii) Il existe une unique probabilité $\pi \in \mathcal{P}$, Q-invariante, et des constantes $C \in \mathbb{R}^+$ et $r \in [0,1[$ telles que

$$\forall f \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|Q^n f - \pi(f)1_E\|_\infty \le Cr^n \|f\|_\infty, \tag{3.5}$$

où, si $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_K)$, on a noté $\pi(f) := \sum_{k=1}^K \pi_k f(k)$.

Démonstration. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est évidente. Supposons maintenant (i).

a. *Unicité de la probabilité Q-invariante et convergence de (Q^n).* Notons $B_1 = \mathrm{Ker}(Q - Id)$, puis λ_j, $j = 2, \ldots, s$, les valeurs propres de Q de module strictement inférieur à 1, et enfin $B_j = \mathrm{Ker}(Q - \lambda_j Id)^{m_j}$, $j = 2, \ldots, s$, le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_j (de multiplicité m_j). D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le théorème des noyaux, on a

$$\mathcal{B} = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_s.$$

Notons $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_s$ les projections associées à cette somme directe, et pour $f \in \mathcal{B}$, posons : $\forall j = 1, \ldots, s$, $f_j := \Pi_j(f)$. Alors $f = \sum_{j=1}^s f_j$, et par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q^n f = f_1 + \sum_{j=2}^s Q^n f_j$. Par la formule du binôme, on a, pour tous $j \in \{2, \ldots, s\}$ et $n \ge m_j - 1$:

$$Q^n f_j = (\lambda_j Id + (Q - \lambda_j Id))^n f_j = \sum_{p=0}^{m_j - 1} \binom{n}{p} \lambda_j^{n-p} (Q - \lambda_j Id)^p f_j.$$

Rappelons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to +\infty} \binom{n}{p} \lambda_j^{n-p} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p!} n^p \lambda_j^{n-p} = 0$ car $|\lambda_j| < 1$. On a donc $\lim_{n \to +\infty} Q^n f_j = 0$ et finalement, $\lim_{n \to +\infty} Q^n f = f_1$. Comme $Ker(Q - Id)$ est par hypothèse la droite vectorielle de $\mathcal{B}$ engendrée par 1_E, il existe donc une unique forme linéaire π sur $\mathcal{B}$, identifiée à un vecteur $\pi := (\pi_1, \ldots, \pi_K) \in \mathbb{C}^K$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n \to +\infty} Q^n f = \pi(f) 1_E = \big(\sum_{k=1}^K \pi_k f(k) \big) 1_E.$$

Puisque Q est un opérateur positif de $\mathcal{B}$ et que $Q1_E = 1_E$, on obtient par passage à la limite : $\forall f \in \mathcal{B}$, $\pi(f) \ge 0$, et $\pi(1_E) = 1$. Donc $\pi \in \mathcal{P}$. De plus, π est Q-invariante car, d'après ce qui précède, on a pour tout $f \in \mathcal{B}$,

$$\pi(Qf) 1_E = \lim_{n \to +\infty} Q^n(Qf) = \lim_{n \to +\infty} Q^n(f) = \pi(f) 1_E.$$

Enfin π est l'unique probabilité Q-invariante car 1 est valeur propre simple de Q, donc de la transposée de Q.

b. *Convergence géométrique de (Q^n) vers le projecteur $\pi(\cdot)1_E$.* Comme $\mathcal{B}$ est de dimension finie, les projections Π_j introduites ci-dessus sont continues sur $\mathcal{B}$, et par conséquent, pour tout $j \in \{2, \ldots, s\}$, il existe $b_j > 0$ tel que $\forall f \in \mathcal{B}$, $\|f_j\|_\infty \le b_j \|f\|_\infty$. Considérons maintenant

$$r \in \big] \max(|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_s|), 1 \big[\quad \text{et} \quad N := \max\big(m_2 - 1, \ldots, m_s - 1\big).$$

Soit $j \in \{2, \ldots, s\}$. Il existe $C_j > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$, $n^p|\lambda_j|^n \leq C_j r^n$ car $\lim_{n \to +\infty} n^p(\frac{\lambda_j}{r})^n = 0$. D'après ce qui précède, on a donc, pour tout $n > N$ et $f \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\|Q^n f - \pi(f)1_E\|_\infty &\leq \sum_{j=2}^{s} \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{1}{p!} n^p |\lambda_j|^{n-p} \|Q - \lambda_j Id\|_\infty^p \|f_j\|_\infty \\
&\leq \left(\sum_{\substack{j=2 \\ \lambda_j \neq 0}}^{s} \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{1}{p!} b_j C_j |\lambda_j|^{-p} \|Q - \lambda_j Id\|_\infty^p \right) r^n \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité (3.5) avec $C := \max(C', M)$, où l'on a posé

$$C' := \sum_{\substack{j=2 \\ \lambda_j \neq 0}}^{s} \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{1}{p!} b_j C_j |\lambda_j|^{-p} \|Q - \lambda_j Id\|_\infty^p \quad \text{et} \quad M = \max_{\ell=0,\ldots,N} r^{-\ell} \|Q^\ell - \pi(\cdot)1_E\|_\infty.$$

□

3.2.4 Irréductibilité d'une matrice stochastique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $q^{(n)}(i,j)$ le terme général d'indice de ligne i et de colonne j, $(i,j) \in E^2$, de la matrice stochastique Q^n.

Définition 3.4. `[Irréductibilité d'une matrice stochastique.]`

1. Q est irréductible si, pour tout $(x,y) \in E^2$, il existe $n(x,y) \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^{(n(x,y))}(x,y) > 0$.

2. Q est fortement irréductible s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall (i,j) \in E^2$, $q^{(N)}(i,j) > 0$.

La proposition suivante montre que la forte irréductibilité de Q implique la forte ergodicité de l'opérateur de transition Q associé sur $\mathcal{B}$:

Proposition 3.4. *Soit Q une matrice stochastique fortement irréductible. Il existe une unique probabilité $\pi \in \mathcal{P}$, Q-invariante, et on a (3.5).*

Démonstration. Montrons que les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites. On note N l'entier introduit dans la définition 3.4.

a. La valeur propre 1 de Q est simple. Soit X une colonne propre associée à la valeur propre 1. Notons $M = \max_{i=1,\cdots,K} |x_i|$. Soient $k \in \{1, \cdots, K\}$ tel que $|x_k| = M$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$ tel que $x_k = Me^{i\theta_k}$. Considérons $Y = (e^{i\theta_k}M)^{-1}X$ et notons $y_1, \cdots, y_K$ les coordonnées de Y. Remarquons que, par définition de Y, on a : $\forall j \in \{1, \cdots, K\}$, $\text{Re }(y_j) \leq |y_j| \leq 1$. Comme $Q^N Y = Y$, on a en particulier :

$$1 = y_k = \sum_{j=1}^{K} q^{(N)}(k,j)\, y_j = \sum_{j=1}^{K} q^{(N)}(k,j) \,\text{Re }(y_j) \leq \sum_{j=1}^{K} q^{(N)}(k,j) = 1.$$

Donc $\sum_{j=1}^{K} q^{(N)}(k,j)(1 - \text{Re }(y_j)) = 0$ et comme la matrice Q^N est, par hypothèse, à coefficients strictement positifs, on déduit de l'égalité précédente que $\forall j \in \{1, \cdots, K\}$, $\text{Re }(y_j) = 1$

et donc que $y_j = 1$. Par conséquent X est colinéaire à la colonne 1_E.

b. On a : $\forall n \geq N,\ Q^n > 0$, où la notation $Q^n > 0$ signifie que : $\forall (i,j) \in E^2,\ q^{(n)}(i,j) > 0$. En effet, il suffit de démontrer que : $Q^n > 0 \Rightarrow Q^{n+1} > 0$. Or, supposons que $Q^n > 0$ et qu'il existe $(i,j) \in E^2$ tel que $q^{(n+1)}(i,j) = 0$. En utilisant $Q^{n+1} = Q^n Q$ et $Q^n > 0$, on obtient alors : $\forall k \in E,\ q(k,j) = 0$, autrement dit on a $QE_j = 0$, où E_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^K$. D'où $Q^n E_j = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $Q^n > 0$.

c. 1 est la seule valeur propre de Q de module 1. Soit λ une valeur propre complexe de Q de module 1, et soit X une colonne propre associée. Notons $x_1, \cdots, x_K$ les coordonnées de X. Soit $k \in \{1, \cdots, K\}$ tel que $|x_k| = \max_{i=1,\cdots,K} |x_i|$. Soit $n \geq N$. De l'égalité $\lambda^n x_k = \sum_{j=1}^K q^{(n)}(k,j) x_j$, on déduit que $|\lambda^n - q^{(n)}(k,k)| \leq 1 - q^{(n)}(k,k)$ et donc que $|\lambda^n - q^{(n)}(k,k)| = 1 - q^{(n)}(k,k)$ car

$$1 - q^{(n)}(k,k) = |\lambda^n| - q^{(n)}(k,k) \leq |\lambda^n - q^{(n)}(k,k)| \leq 1 - q^{(n)}(k,k).$$

En développant et simplifiant l'égalité $|\lambda^n - q^{(n)}(k,k)|^2 = (1 - q^{(n)}(k,k))^2$, on obtient alors $\mathrm{Re}\,(\lambda^n) = 1$ car $q^{(n)}(k,k) > 0$. D'où $\lambda^n = 1$. Comme cette égalité est vérifiée pour tout $n \geq N$, on a nécessairement $\lambda = 1$. □

3.2.5 Période d'un état récurrent. Apériodicité d'une matrice stochastique.

Nous présentons ici la condition d'apériodicité d'une matrice stochastique irréductible, et démontrons qu'elle implique la propriété de forte irréductibilité, et donc de forte ergodicité.

Définition 3.5. `[Etat récurrent pour une matrice stochastique.]`
Soit $x \in E$. On dit que x est récurrent si $L_x := \{n \in \mathbb{N}^*, q^{(n)}(x,x) > 0\}$ est non vide.

Soit $x \in E$, récurrent. Observons que L_x est stable par addition car si $(m,n) \in L_x^2$, alors on a

$$q^{(m+n)}(x,x) \geq q^{(m)}(x,x) q^{(n)}(x,x) > 0.$$

Le sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ engendré par L_x est donc $L_x - L_x = \{s - r, (s,r) \in L_x^2\}$. Il existe alors un unique $d(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $L_x - L_x = d(x) \cdot \mathbb{Z}$, et $d(x)$ est le plus grand entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $L_x \subset d \cdot \mathbb{N}^*$.

Définition 3.6. `[Période d'un état récurrent pour une matrice stochastique.]`
Soit $x \in E$ récurrent. La période $d(x)$ de x est le plus grand entier d de $\mathbb{N}^*$ tel que $L_x \subset d \cdot \mathbb{N}^*$.

Remarque 3.5. *Soit $x \in E$. Alors x est de période 1 si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^{(p)}(x,x) > 0$ et $q^{(p+1)}(x,x) > 0$. En effet, si x est de période 1, alors on a par définition $L_x - L_x = \mathbb{Z}$, et en particulier $1 \in L_x - L_x$. Donc L_x contient bien deux entiers naturels non nuls consécutifs. La réciproque est immédiate.*

Proposition 3.5. *Soit Q une matrice stochastique irréductible. Tous les états de E sont récurrents et ont la même période.*

Démonstration. La récurrence est directement impliquée par l'irréductibilité de Q (cf. déf. 3.4). Soit $(x, y) \in E^2$. Comme Q est irréductible, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $q^{(m)}(x, y) > 0$ et $q^{(n)}(y, x) > 0$. Donc $m + n \in L_x$ car $q^{(m+n)}(x, x) \geq q^{(m)}(x, y)q^{(n)}(y, x) > 0$. De même, pour tout $r \in L_y$, on a

$$q^{(m+n+r)}(x, x) \geq q^{(m)}(x, y)q^{(r)}(y, y)q^{(n)}(y, x) > 0,$$

donc $m + n + r \in L_x$. D'où $r = (m + n + r) - (m + n) \in L_x - L_x := d(x) \cdot \mathbb{Z}$. On a ainsi montré que $L_y \subset d(x) \cdot \mathbb{N}^*$. Comme $d(y)$ est le plus grand entier d de $\mathbb{N}^*$ tel que $L_y \subset d \cdot \mathbb{N}^*$, on a $d(x) \leq d(y)$ et, en raisonnant comme précédemment après avoir échangé les rôles de x et y, on a aussi $d(y) \leq d(x)$. Par conséquent, $d(y) = d(x)$. □

Définition 3.7. *Soit Q une matrice stochastique irréductible. La période commune à tous les points de E est appelée la période de Q. On dit que Q est apériodique si la période de la chaîne est égale à 1.*

Proposition 3.6. *Si Q est une matrice stochastique irréductible et apériodique, alors Q est fortement irréductible. En particulier il existe une unique probabilité $\pi \in \mathcal{P}$, Q-invariante, et on a la propriété de forte ergodicité (3.5).*

Démonstration. La seconde assertion découle de la première et de la proposition 3.4. Démontrons la première assertion. Pour $u \in E$, on définit (cf. Remarque 3.5)

$$p(u) := \min\{p \in \mathbb{N}^*,\ q^{(p)}(u, u) > 0 \text{ et } q^{(p+1)}(u, u) > 0\},$$

$$\text{puis}\quad N(u) = 1 \text{ si } p(u) = 1, \quad \text{et } N(u) := p(u)^2 - 1 \text{ si } p(u) \geq 2.$$

Lemme 3.3. *Soit $u \in E$. On a : $\forall n \geq N(u),\ q^{(n)}(u, u) > 0$.*

Démonstration. Notons que la propriété du lemme s'écrit encore : $\forall n \geq N(u),\ n \in L_u$. La propriété souhaitée s'obtient facilement si $p(u) = 1$, car la stabilité de L_u par addition donne $L_u = \mathbb{N}^*$. Supposons maintenant que $p(u) \geq 2$. Soit $n \geq p(u)^2 - 1$. L'égalité de la division euclidienne de n par $p(u)$ s'écrit : $n = qp(u) + r$, avec $r \in \{0, \cdots, p(u) - 1\}$ et donc

$$n = (q - r)p(u) + r\big(p(u) + 1\big).$$

On a $q - r \in \mathbb{N}$ car $r(p(u) + 1) \leq p(u)^2 - 1$. Comme $p(u)$ et $p(u) + 1$ sont dans L_u (stable par addition), on a bien $n \in L_u$. □

Démontrons maintenant que Q est fortement irréductible. Comme Q est irréductible, on peut définir pour tout $(u, v) \in E^2$, $u \neq v$,

$$N(u, v) = \min\{m \in \mathbb{N}^*,\ q^{(m)}(u, v) > 0\}.$$

Considérons $N := \max\{N(u) + N(u, v),\ (u, v) \in E^2,\ u \neq v\}$, Soit $(u, v) \in E^2$. Si $u \neq v$, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $N = N(u) + N(u, v) + \ell$, et on a donc d'après le lemme précédent et par définition de $N(u, v)$:

$$q^{(N)}(u, v) \geq q^{(N(u)+\ell)}(u, u)\, q^{(N(u,v))}(u, v) > 0.$$

Si $u = v$, alors d'après le lemme précédent, on a $q^{(N)}(u, u) > 0$ car $N \geq N(u)$. □

3.3 Perturbation continue d'un opérateur fortement ergodique.

Dans cette section, $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est à nouveau un espace de Banach complexe quelconque, et on considère $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, *fortement ergodique*. Reprenant les notations de la section 3.1, on note

$$\Pi := \lim_{n\to+\infty} Q^n = \pi(\cdot)e, \tag{3.6}$$

où $\pi \in \mathcal{B}'$ et $e \in \mathcal{B}$ avec $\pi(e) = 1$. On rappelle que la propriété de forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}$ s'exprime comme suit : il existe $C > 0$ et $\hat{\kappa} \in [0, 1[$ tels que

$$\forall n \geq 1, \forall f \in \mathcal{B},\ \|Q^n f - \pi(f)e\| \leq C\hat{\kappa}^n \|f\|. \tag{3.7}$$

Pour $\kappa \in [0, 1[$, on définit les sous-ensembles suivants du plan complexe :

$$\mathcal{D}_\kappa = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z| \geq \kappa,\ \ |z-1| \geq \frac{1-\kappa}{2} \right\}, \tag{3.8}$$

puis on note $\Gamma_1(\kappa)$ (ou plus simplement Γ_1) le cercle orienté centré en $z = 1$, de rayon $(1-\kappa)/2$, et $\Gamma_0(\kappa)$ (ou Γ_0) le cercle orienté centré en $z = 0$, de rayon κ. Notons que Γ_1 et Γ_0 sont contenus dans $\mathcal{D}_\kappa$. Pour tout $R > 0$, on note $B(0, R) := \{t \in \mathbb{R}^d : \|t\| < R\}$ et $\overline{B}(0, R) := \{t \in \mathbb{R}^d : \|t\| \leq R\}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant 0, et soit $Q(\cdot)$ une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ telle que $Q(0) = Q$.

Proposition 3.7. `[Perturbation continue de` Q`.]`
Si $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, alors, pour tout $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$, il existe $R_\kappa > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{D}_\kappa$ et tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, l'endomorphisme $zId - Q(t)$ est inversible. De plus,

$$\mathcal{M}_\kappa := \sup\left\{ \|(zId - Q(t))^{-1}\|,\ t \in \overline{B}(0, R_\kappa),\ z \in \mathcal{D}_\kappa \right\} < +\infty. \tag{3.9}$$

Posons, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$:

$$\Pi(t) := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} \big(zId - Q(t)\big)^{-1} dz, \tag{3.10}$$

$$N(t) := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} z\big(zId - Q(t)\big)^{-1} dz. \tag{3.11}$$

Alors, quitte à diminuer la valeur de R_κ, on a, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, $\pi(\Pi(t)e) \neq 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q(t)^n = \lambda(t)^n \Pi(t) + N(t)^n, \tag{3.12}$$

avec :

$$\lambda(t) := \frac{\pi\big(Q(t)\Pi(t)e\big)}{\pi(\Pi(t)e)}, \tag{3.13}$$

$$N(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} z^n (zId - Q(t))^{-1}\ dz. \tag{3.14}$$

Enfin les fonctions $\Pi(\cdot)$ et $N(\cdot)^n$ sont dans $\mathcal{C}^0(\overline{B}(0, R_\kappa), \mathcal{L}(B))$, et $\lambda(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\overline{B}(0, R_\kappa), \mathbb{C})$. En particulier on a : $\lim_{t\to 0} \Pi(t) = \Pi(0) = \Pi$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, puis $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = \lambda(0) = 1$.

Avant de donner dans la section suivante une preuve de la proposition 3.7, nous donnons quelques conséquences assez simples des propriétés ci-dessus.

Notons tout d'abord que, par passage à la norme dans (3.14), on obtient d'après (3.9) :

$$\sup_{t\in B(0,R_\kappa)} \|N(t)^n\| \le \mathcal{M}_\kappa\, \kappa^{n+1}. \tag{3.15}$$

Ainsi la propriété (3.12) permet d'étendre, au voisinage de $t = 0$, la propriété de forte ergodicité (3.7). Plus précisément on a :

$$\sup_{t\in B(0,R_\kappa)} \|Q(t)^n - \lambda(t)^n\Pi(t)\| \le \mathcal{M}_\kappa\, \kappa^{n+1}.$$

Une autre conséquence de (3.14) est la formule suivante.

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses de la proposition 3.7, on a pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$:*

$$\mathcal{N}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} N(t)^n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_0} \frac{z}{1-z}\big(zId - Q(t)\big)^{-1}\, dz. \tag{3.16}$$

Démonstration. Soit $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$ fixé. Posons $u_n(z) = z^n(zId - Q(t))^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \Gamma_0$. La série de fonctions continues $\sum_{n\ge1} u_n$, de la variable z, converge uniformément sur Γ_0 car $\forall z \in \Gamma_0$, $\|u_n(z)\| \le \mathcal{M}_\kappa\kappa^{n+1}$ d'après (3.9). Sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc intégrable terme à terme sur Γ_0. En utilisant (3.14), on a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} N(t)^n = \oint_{\Gamma_0} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n(z - Q(t))^{-1}\ dz = \oint_{\Gamma_0} \frac{z}{1-z}\big(zId - Q(t)\big)^{-1} dz,$$

ce qui démontre (3.16). □

Comme conséquence évidente de (3.12) et du corollaire précédent, on obtient la formule ci-dessous, qui jouera un rôle important pour l'étude des potentiels markoviens faite au chapitre suivant. Soit $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, $t \ne 0$. Si $|\lambda(t)| < 1$, alors on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Q(t)^n = \frac{\lambda(t)}{1-\lambda(t)}\Pi(t) + \mathcal{N}(t).$$

Éxaminons enfin le cas où $Q(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^m$ avec $m > 0$ quelconque. Pour cela, on introduit la définition suivante :

Définition 3.8. *Si $s \in \mathbb{R}_+^*$, $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace vectoriel normé, et enfin si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{C}_b^s(\mathcal{U}, X)$ l'ensemble des fonctions $F : \mathcal{U} \to X$ vérifiant les conditions suivantes :*
- *F est $\lfloor s\rfloor$ fois continûment différentiable sur $\mathcal{U}$,*
- *Les dérivées partielles d'ordre $j = 0, \dots, \lfloor s\rfloor$ de F sont bornées sur $\mathcal{U}$,*
- *Les dérivées partielles d'ordre $\lfloor s\rfloor$ de F sont uniformément u-höldériennes sur $\mathcal{U}$, avec $u := s - \lfloor s\rfloor$.*

La dernière propriété signifie, en notant $F^{(\lfloor s \rfloor)}$ une dérivée partielle d'ordre $\lfloor s \rfloor$ de F, que :

$$\sup \left\{ \frac{\|F^{(\lfloor s \rfloor)}(t) - F^{(\lfloor s \rfloor)}(t')\|_X}{\|t - t'\|^u},\ (t, t') \in \mathcal{U}^2,\ t \neq t' \right\} < \infty.$$

On utilise en outre les notations de la proposition 3.7 et du corollaire 3.1.

Proposition 3.8. `[Perturbation de classe` $\mathcal{C}^m$ `de` Q`.]`
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, alors on a, pour tout $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$, les propriétés suivantes :

(i) $\Pi(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(B(0, R_\kappa), \mathcal{L}(\mathcal{B}))$,

(ii) Pour tout $n \geq 1$, $N_n(\cdot) := N(\cdot)^n \in \mathcal{C}_b^m(B(0, R_\kappa), \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, et

$$\forall \ell = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor,\, \exists C_\ell > 0,\, \forall n \geq 1, \sup_{t \in B(0, R_\kappa)} \|N_n^{(\ell)}(t)\| \leq C_\ell\, \kappa^n,$$

(iii) $\lambda(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(B(0, R_\kappa), \mathbb{C})$,

(iv) $\mathcal{N}(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(B(0, R_\kappa), \mathcal{L}(\mathcal{B}))$.

Démonstration. Comme $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ et $U \mapsto U^{-1}$ (de l'ensemble des endomorphismes continus inversibles dans lui-même) est de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'application $t \mapsto (zId - Q(t))^{-1}$ est dans $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$. Par dérivation sous le signe intégrale dans (3.10) (3.14) et (3.16), et en utilisant (3.13) pour l'étude de $\lambda(\cdot)$, on déduit les assertions $(i) - (iv)$. □

La démonstration de la proposition 3.7 est présentée dans la section 3.5. Avant nous rappelons ci-dessous quelques résultats très classiques de théorie spectrale des opérateurs.

3.4 Quelques rappels sur les opérateurs d'un espace de Banach.

Proposition 3.9. *On a les propriétés suivantes :*

(a) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $\|A\| < 1$. Alors $Id - A$ est inversible, d'inverse

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n. \tag{3.17}$$

(b) L'ensemble $\mathcal{GL}(\mathcal{B})$ des automorphismes de $\mathcal{B}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

(c) L'application $V \mapsto V^{-1}$ est continue de $\mathcal{GL}(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{GL}(\mathcal{B})$.

Démonstration. (a) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $\|A\| < 1$. La série $\sum_{n \geq 0} A^n$ converge (en norme) dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les égalités :

$$Id - A^{N+1} = (Id - A)\big(\sum_{n=0}^{N} A^n\big) = \big(\sum_{n=0}^{N} A^n\big)(Id - A),$$

on obtient $Id = (Id - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(Id - A)$. Donc $Id - A$ est inversible, d'inverse $(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

(b) Soit $V \in \mathcal{GL}(\mathcal{B})$. Montrons que $\mathcal{GL}(\mathcal{B})$ contient la boule ouverte de centre V et de rayon $\|V^{-1}\|^{-1}$. Soit $U \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $\|U - V\| < \|V^{-1}\|^{-1}$. Posons $A := -V^{-1}(U - V)$. Comme $\|A\| < 1$, on a $Id + V^{-1}(U - V) \in \mathcal{GL}(\mathcal{B})$ d'après l'assertion (a), et son inverse est donné par

$$\big(Id + V^{-1}(U - V)\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \big(V^{-1}(U - V)\big)^n.$$

Or $U = V\big(Id + V^{-1}(U - V)\big)$, donc $U \in \mathcal{GL}(\mathcal{B})$, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \big(V^{-1}(U - V)\big)^n V^{-1}$.

(c) Soit $V \in \mathcal{GL}(\mathcal{B})$. La continuité en V du passage à l'inverse découle de l'inégalité suivante, obtenue dans la preuve de (b) en considérant $U \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $\|U - V\| < \|V^{-1}\|^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\|U^{-1} - V^{-1}\| &= \|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \big(V^{-1}(U - V)\big)^n V^{-1}\| \\
&\leq \|V^{-1}\| \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\|V^{-1}\| \|U - V)\|\big)^n \\
&\leq \|V^{-1}\|^2 \frac{\|U - V\|}{1 - \|V^{-1}\|\|U - V\|}.
\end{aligned}$$

□

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Rappelons que l'ensemble résolvant de T, noté $\rho(T)$, est l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $zId - T$ soit inversible. Le corollaire ci-dessous montrera que $\rho(T)$ est non vide, et la proposition 3.9(b) montre que $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant (i. e. $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$). On rappelle que $\sigma(T)$ est non vide. Le corollaire ci-dessous montrera que $\sigma(T)$ est borné, donc compact. Le rayon spectral de T, noté $r(T)$, est défini par $r(T) = \sup\{|z|, z \in \sigma(T)\}$. Enfin on utilisera parfois la notation :

$$\forall z \in \rho(T), \quad R_z(T) := (zId - T)^{-1}.$$

L'application $z \mapsto R_z(T)$, définie de $\rho(T)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, est appelée la résolvante de T.

Corollaire 3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(B)$. Alors on a $\sigma(T) \subset \overline{D}(0, \|T\|)$, autrement dit $r(T) \leq \|T\|$. Plus précisément, si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| > \|T\|$, alors $zId - T$ est inversible et*

$$(zId - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)} T^n. \tag{3.18}$$

$$\textit{En particulier :} \quad |z| > \|T\| \;\Rightarrow\; \|(zId - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| - \|T\|}. \tag{3.19}$$

Démonstration. Remarquer que $zId - T = z(Id - z^{-1}T)$ et appliquer la proposition 3.9(a) avec $A = z^{-1}T$. La majoration de la norme de la résolvante repose sur un calcul élémentaire de somme de série géométrique. □

L'équation de la résolvante, rappelée ci-dessous, est importante en théorie spectrale. Elle implique en particulier que l'application résolvante $z \mapsto R_z(T)$ est holomorphe de l'ouvert $\rho(T)$ dans $\mathcal{GL}(\mathcal{B})$.

Lemme 3.4. `[Equation de la résolvante.]` *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Soient $(z, z') \in \rho(T)^2$. On a :*

$$R_{z'}(T) - R_z(T) = (z - z')R_z(T)R_{z'}(T). \tag{3.20}$$

Démonstration. Comme $z'Id - T$ et $zId - T$ commutent, $z'Id - T$ et $R_z(T)$ commutent aussi. Donc $R_{z'}(T) - R_z(T) = [\,(zId - T) - (z'Id - T)\,]\, R_z(T)R_{z'}(T) = (z - z')R_z(T)R_{z'}(T)$. □

Le lemme suivant généralise la formule (3.18) aux nombres complexes z vérifiant $|z| > r(T)$.

Lemme 3.5. `[Série de Neumann.]` *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ et $z \in \mathbb{C}$. On a*

$$|z| > r(T) \;\Rightarrow\; R_z(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)}\, T^n. \tag{3.21}$$

Démonstration. Posons $r = r(T)$ pour simplifier, et définissons $U(0) = 0$, et

$$\forall z \in D(0, 1/r),\; z \neq 0, \quad U(z) = zR_{\frac{1}{z}}(T).$$

D'après la formule (3.20), $z \mapsto R_z(T)$ est une fonction holomorphe sur $\rho(T)$, donc sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$. Il vient que U est holomorphe sur $D(0, 1/r)$: en effet, U est holomorphe sur $D(0, 1/r) \setminus \{0\}$ par les opérations sur les fonctions holomorphes, et holomorphe en 0 avec $U'(0) = 0$ car d'après (3.19) on a lorsque $z \in \mathbb{C}$ est tel que $1/|z| > \|T\|$:

$$\|\frac{U(z) - U(0)}{z}\| = \|R_{\frac{1}{z}}(T)\| \leq \frac{1}{|z|^{-1} - \|T\|} \to 0 \;\text{ quand } z \to 0.$$

Par conséquent il existe une unique suite $(C_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ telle que

$$\forall z \in D(0, 1/r),\; U(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} z^n C_n.$$

Or, si $|z| < 1/\|T\|$, on a $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+2}\, T^n$ d'après (3.18). Donc, par unicité de la suite $(C_n)_{n\geq 2}$, on a : $\forall z \in D(0, 1/r)$, $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+2}\, T^n$ et par conséquent, pour tout $|z| > r$,

$$R_z(T) = zU(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)}\, T^n.$$

□

Lemme 3.6. `[Formule du rayon spectral.]` *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. On a $r(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Démonstration. La suite $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})$ est une suite de réels positifs majorée par $\|T\|$. Montrons la convergence de cette suite en prouvant que $\underline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'égalité

$$z^n Id - T^n = (zId - T) \sum_{k=0}^{n-1} z^k T^{n-1-k}$$

implique que si $z^n \in \rho(T^n)$ alors $z \in \rho(T)$. Donc si $z \in \sigma(T)$, alors $z^n \in \sigma(T^n)$, et donc $|z|^n \leq r(T^n) \leq \|T^n\|$ d'après le corollaire 3.2. D'où $r(T) \leq \underline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r(T)$. D'après (3.21), $\lim_n z^{-(n+1)} T^n = 0$. Donc il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T^n\| \leq C|z|^{n+1}$. On obtient alors que $\overline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |z|$ et donc que $\overline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T)$. Par conséquent, on a $\overline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(T) \leq \underline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ et l'égalité annoncée car $\underline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. □

Remarque 3.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, T^n \neq 0$. On peut établir directement la convergence de la suite $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})$: la suite réelle de terme général $a_n = \ln(\|T^n\|)$ est sous-additive et on obtient classiquement que la suite $(\frac{1}{n}a_n)_n$ converge (vers sa borne inférieure).*

3.5 Preuve de la proposition 3.7.

On suppose dans la suite que les hypothèses de la proposition 3.7 sont vérifiées, à savoir : Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$, $Q(\cdot)$ est une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ telle que $Q(0) = Q$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant 0, et enfin $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$.

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $D(a,r)$ (resp. $\overline{D}(a,r)$) le disque complexe ouvert (resp. fermé) de centre a et de rayon r. Rappelons que le réel $\hat{\kappa} \in [0,1[$ est défini en (3.7) et que (cf. prop. 3.1)

$$\sigma(Q) \subset \overline{D}(0,\hat{\kappa}) \cup \{1\}. \tag{3.22}$$

3.5.1 Localisation du spectre de $Q(t)$ au voisinage de 0. Preuve de (3.9).

Commençons par présenter quelques conséquences immédiates de (3.22).

Remarque 3.7. *Soit $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$, et soit $\mathcal{S}_\kappa = D(0,\kappa) \cup D\big(1, (1-\kappa)/2\big)$.*

(i) Le sous-ensemble $\mathcal{S}_\kappa$ est un voisinage ouvert de $\sigma(Q)$ dans le plan complexe.

(ii) L'ensemble $\mathcal{D}_\kappa$ défini en (3.8) est le complémentaire de $\mathcal{S}_\kappa$ dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, on a $\mathcal{D}_\kappa \subset \rho(Q)$, autrement dit pour tout $z \in \mathcal{D}_\kappa$, l'endomorphisme $zId - Q$ est inversible.

(iii) Par continuité de $z \mapsto (zId - Q)^{-1}$ sur le fermé $\mathcal{D}_\kappa$ (cf. proposition 3.9(c)), et d'après (3.19), on a $\sup_{z \in \mathcal{D}_\kappa} \|(zId - Q)^{-1}\| < +\infty$.

Soit $R_\mathcal{O} > 0$ tel que $\overline{B}(0, R_\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Comme $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ par hypothèse, l'application $\|Q(\cdot)\|$ est majorée sur le compact $\overline{B}(0, R_\mathcal{O})$ de $\mathbb{R}^d$, et on pose

$$d = \sup\big\{\|Q(t)\|,\ t \in \overline{B}(0, R_\mathcal{O})\big\}.$$

D'après le corollaire 3.2, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_{\mathcal{O}})$, on a $\sigma(Q(t)) \subset \overline{D}(0, d)$. Le lemme suivant étend la remarque 3.7 (i) à $Q(t)$ pour t voisin de 0.

Lemme 3.7. `[Continuité du spectre quand` $t \to 0$`.]` *Soit* $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$. *Il existe* $R_\kappa \in]0, R_{\mathcal{O}}]$ *tel que*

$$\forall t \in \overline{B}(0, R_\kappa), \quad \sigma(Q(t)) \subset D(0, \kappa) \cup D\big(1, (1-\kappa)/2\big).$$

Démonstration. Pour $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$, posons $\mathcal{S}_\kappa := D(0, \kappa) \cup D\big(1, (1-\kappa)/2\big)$. On procède par l'absurde. Supposons que $\sigma(Q(t))$ ne soit pas contenu dans $\mathcal{S}_\kappa$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in \overline{B}(0, R_{\mathcal{O}}/n)$ et $z_n \in \overline{D}(0, d) \setminus O_\kappa$ tels que l'endomorphisme $z_n Id - Q(t_n)$ de $\mathcal{B}$ soit non inversible. Comme $\overline{D}(0, d) \setminus \mathcal{S}_\kappa$ est un compact de $\mathbb{C}$, on peut considérer une valeur d'adhérence, $z = \lim_k z_{n_k}$, de la suite (z_n). On a $\sigma(Q) \subset \mathcal{S}_\kappa$ (d'après (3.22)) et $z \notin \mathcal{S}_\kappa$, d'où $z \notin \sigma(Q)$. L'endomorphisme $zId - Q$ est donc inversible, mais il est aussi non inversible d'après la proposition 3.9 *(b)* car, la suite (t_n) ayant pour limite 0, $zId - Q$ est la limite de la suite $(z_{n_k} Id - Q(t_{n_k}))_k$ d'endomorphismes non inversibles. Cette contradiction prouve que l'assertion du lemme est vraie. □

La conclusion du lemme 3.7 étend évidemment aussi la remarque 3.7 (ii) à $Q(t)$. Plus précisément, pour tout $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$ et pour tout $(z, t) \in \mathcal{D}_\kappa \times \overline{B}(0, R_\kappa)$, l'opérateur $zId - Q(t)$ est inversible. Nous allons maintenant étendre la remarque 3.7 (iii) en démontrant que la famille de résolvantes $((zId - Q(t))^{-1})_{z,t}$ est bornée sur $\mathcal{D}_\kappa \times \overline{B}(0, R_\kappa)$ (ce résultat correspond en fait à la propriété (3.9) dans la proposition 3.7). Pour cela nous utiliserons la remarque suivante :

Remarque 3.8. *Pour* $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$, *l'application* $(z, t) \mapsto (zId - Q(t))^{-1}$ *est continue de l'ensemble* $\mathcal{D}_\kappa \times \overline{B}(0, R_\kappa)$ *dans* $\mathcal{GL}(B)$.

En effet, cette application est la composée, d'une part de $(z, t) \mapsto zId - Q(t)$ *qui est continue de* $\mathcal{D}_\kappa \times \overline{B}(0, R_\kappa)$ *dans* $\mathcal{GL}(B)$ *car par hypothèse* $Q(\cdot)$ *est continue sur* $\overline{B}(0, R_\kappa) \subset \mathcal{O}$, *d'autre part de* $V \mapsto V^{-1}$ *qui est continue de* $\mathcal{GL}(B))$ *dans lui-même (proposition 3.9(c)).*

Preuve de (3.9). De la remarque précédente, on déduit que $(z, t) \mapsto \|(zId - Q(t))^{-1}\|$ est continue sur le compact $K := (\mathcal{D}_\kappa \cap \overline{D}(0, 2d)) \times \overline{B}(0, R_\kappa)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^d$. D'où

$$\sup\left\{\|(zId - Q(t))^{-1}\|, \ (z, t) \in K\right\} < +\infty.$$

De plus, si $z \in \mathcal{D}_\kappa$ avec $|z| > 2d$ et si $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, alors on a

$$\|(zId - Q(t))^{-1}\| \le \frac{1}{|z| - \|Q(t)\|} \le \frac{1}{d}$$

d'après le corollaire 3.2. □

3.5.2 Ecriture des projecteurs Π et $Id - \Pi$ comme intégrales de Dunford.

Rappelons (cf. (3.6)) que Π est le projecteur de rang 1 défini pour tout $f \in \mathcal{B}$ par :

$$\Pi f = \pi(f)e,$$

et posons, pour tout $f \in \mathcal{B}$:

$$\Pi_0 f = f - \Pi(f).$$

Soit $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$. Rappelons que Γ_1 (resp. Γ_0) est le cercle orienté de centre $z = 1$ et de rayon $(1-\kappa)/2$ (resp. de centre $z = 0$ et de rayon κ). Puisque $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subset \mathcal{D}_\kappa$, l'endomorphisme $(zId - Q)^{-1}$ est bien défini pour z appartenant à Γ_1 ou Γ_0.

Lemme 3.8. `[Expressions intégrales des projecteurs` Π `et` Π_0`.]` *On a :*

$$\Pi = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} (zId - Q)^{-1} dz \quad \textit{et} \quad \Pi_0 = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} (zId - Q)^{-1} dz.$$

Démonstration. Définissons dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$:

$$A := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} (zId - Q)^{-1} dz.$$

Comme $(zId - Q)e = (z-1)e$, on a :

$$Ae = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} (zId - Q)^{-1} e \, dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z-1} e \, dz = \frac{1}{2i\pi} \left(\oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z-1} dz \right) e = e.$$

Donc A et Π coïncident sur la droite vectorielle de $\mathcal{B}$ engendrée par e. Définissons maintenant $H = \operatorname{Ker} \pi$, qui est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}$ (car $\pi \in \mathcal{B}'$) et stable par Q (cf. la remarque 3.2 page 62). Notons Q_H l'endomorphisme de $\mathcal{L}(H)$ induit par Q sur H . D'après (3.7), on a, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $h \in H$, $\|Q^n h\| \leq C\hat{\kappa}^n \|h\|$. Donc, si $|z| > \hat{\kappa}$ et en particulier si $|z| = \kappa$, la série $\sum_{n \geq 0} z^{-(n+1)} Q_H^n h$ converge. On en déduit que $zId_H - Q_H$ est une bijection de H avec, pour tout $h \in H$, $(zId_H - Q_H)^{-1} h = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)} Q_H^n h$. D'où, pour tout $h \in H$:

$$\begin{aligned} Ah &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} (zId_H - Q_H)^{-1} h \, dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)} Q^n h \right) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\oint_{\Gamma_1} z^{-(n+1)} \, dz \right) Q^n h = 0, \end{aligned}$$

l'intégration terme à terme résultant de la convergence uniforme sur Γ_1 de la série de fonctions de la variable z, $\sum_{n \geq 0} z^{-(n+1)} Q^n h$. Donc A et Π coïncident sur l'hyperplan H. Comme $\mathcal{B} = \mathbb{C}e \oplus H$, on a finalement montré que $\Pi = A$.

Par un calcul analogue, en posant $B = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} (zId - Q)^{-1} dz$, et en observant cette fois que $\oint_{\Gamma_0} \frac{dz}{z-1} = 0$, puis que $\oint_{\Gamma_0} z^{-(n+1)} dz = 2i\pi \delta_{0,n}$, on peut établir que $Be = 0$ et que $Bh = h$, pour tout $h \in H$. Donc $B = \Pi_0$. $\square$

3.5.3 Définitions et propriétés des projecteurs perturbés $\Pi(t)$ et $\Pi_0(t)$.

Soit $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$. D'après la remarque 3.8 et $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subset \mathcal{D}_\kappa$, on peut définir pour $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$:

$$\Pi(t) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} (zId - Q(t))^{-1} dz,$$

$$\Pi_0(t) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_0}(zId - Q(t))^{-1}dz. \tag{3.23}$$

Lemme 3.9. `[Perturbation des projecteurs` Π `et` Π_0`.]` *Les applications* $\Pi(\cdot)$ *et* $\Pi_0(\cdot)$ *sont dans* $\mathcal{C}^0(\overline{B}(0,R_\kappa),\mathcal{L}(B))$*. En outre, pour tout* $t\in\overline{B}(0,R_\kappa)$*, les endomorphismes* $\Pi(t)$ *et* $\Pi_0(t)$ *sont des projecteurs de* $\mathcal{B}$ *qui commutent avec* $Q(t)$ *et on a :* $\Pi(t)\Pi_0(t) = \Pi_0(t)\Pi(t) = 0$ *et* $Id = \Pi(t) + \Pi_0(t)$*.*

Démonstration. D'après la remarque 3.8, la fonction $(z,t)\mapsto(zId-Q(t))^{-1}$ est uniformément continue sur le compact $\Gamma_j\times\overline{B}(0,R_\kappa)$ de $\mathbb{C}\times\mathbb{R}^d$ pour $j=0,1$. On en déduit que les intégrales $\Pi(\cdot)$ et $\Pi_0(\cdot)$ dépendent continûment de la variable t. Soit $t\in\overline{B}(0,R_\kappa)$. Montrons que $\Pi(t)^2 = \Pi(t)$. Rappelons qu'on a posé : $R_t(z) := (zId - Q(t))^{-1}$. L'équation de la résolvante (3.20) nous donne

$$R_t(z)R_t(z') = \frac{1}{z-z'}R_t(z') - \frac{1}{z-z'}R_t(z).$$

Soit Γ_1' un cercle orienté de centre $z=1$, de rayon $r'\in]\frac{1-\kappa}{2}, 1-\kappa[$. D'après le lemme 3.7, on a $\Gamma_1'\subset\rho(Q(t))$. Pour $z'\in\Gamma_1'$ fixé, en intégrant l'égalité précédente sur Γ_1, on obtient

$$\left(\oint_{\Gamma_1} R_t(z)\,dz\right)R_t(z') \;=\; \left(\oint_{\Gamma_1}\frac{dz}{z-z'}\right)R_t(z') \;-\; \oint_{\Gamma_1}\frac{1}{z-z'}R_t(z)\,dz$$

d'où

$$2i\pi\,\Pi(t)R_t(z') \;=\; 0 \;-\; \oint_{\Gamma_1}\frac{1}{z-z'}R_t(z)\,dz.$$

En intégrant maintenant cette dernière égalité sur Γ_1' et en utilisant le théorème de Fubini, il vient

$$(2i\pi)^2\Pi(t)^2 = -\int_{\Gamma_1}R_t(z)\left(\int_{\Gamma_1'}\frac{dz'}{z-z'}\right)dz = (2i\pi)^2\,\Pi(t)$$

d'où l'égalité souhaitée. Par un calcul analogue, en considérant $z\in\Gamma_0$ et $z'\in\Gamma_0'$, où Γ_0' est un cercle orienté de centre $z=0$ et de rayon $\kappa'\in]\kappa,\frac{1-\kappa}{2}[$, et en intégrant l'équation résolvante, tout d'abord sur Γ_0, puis sur Γ_0', on montre que $\Pi_0(t)\Pi_0(t) = \Pi_0(t)$.

De même, en intégrant l'équation résolvante avec $z\in\Gamma_1$ (resp. $z\in\Gamma_0$), puis sur $z'\in\Gamma_0'$ (resp. $z'\in\Gamma_1'$), on montre que $\Pi(t)\Pi_0(t) = 0$ (resp. $\Pi_0(t)\Pi(t) = 0$). En outre, $\Pi(t)$ et $\Pi_0(t)$ commutent avec $Q(t)$ car $(z-Q(t))^{-1}$ et $Q(t)$ commutent.

Montrons pour terminer la preuve de ce lemme que $Id = \Pi_0(t) + \Pi(t)$. Soit $\rho > 1 + \frac{1-\kappa}{2}$, et soit Γ_ρ le cercle orienté de centre $z=0$ et de rayon ρ. Comme $z\mapsto(zId-Q(t))^{-1}$ est holomorphe sur l'ensemble résolvant $\rho(T) = \mathbb{C}\setminus\sigma(Q(t))$, la propriété (3.21) et les résultats classiques d'intégrales curvilignes nous donnent :

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_1}(zId-Q(t))^{-1}\,dz \;+\; \oint_{\Gamma_0}(zId-Q(t))^{-1}\,dz \;&=\; \oint_{\Gamma_\rho}(zId-Q(t))^{-1}\,dz\\ &=\; \oint_{\Gamma_\rho}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)}Q(t)^n\right)dz\\ &=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\oint_{\Gamma_\rho} z^{-(n+1)}\,dz\right)Q(t)^n.\end{aligned}$$

En utilisant les égalités $\oint_{\Gamma_\rho} z^{-(n+1)}\,dz = 2i\pi\delta_{0,n}$, il vient $\Pi(t)+\Pi_0(t) = Id$. $\square$

3.5.4 Propriétés au voisinage de 0 de $\Pi(t)$ et définition de la valeur propre perturbée $\lambda(t)$.

Lemme 3.10. `[Rang de` $\Pi(t)$`.]` *Quitte à diminuer la valeur de R_κ, on a, pour tout $t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$, $rg(\Pi(t)) = 1$.*

Démonstration. Comme $t \mapsto \Pi(t)$ est continue en 0 (cf. Lemme 3.9) et que $\Pi(0) = \Pi$, il existe $R'_\kappa \leq R_\kappa$ tel que pour tout $t \in \overline{B}(0,R'_\kappa)$, $\|\Pi(t)-\Pi\| < 1$. Quitte à diminuer la valeur de R_κ, supposons, pour ne pas introduire une notation supplémentaire, que, pour tout $t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$, $\|\Pi(t)-\Pi\| < 1$. Soient $t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$ et $(f,g) \in \Pi(t)(\mathcal{B})^2$. Comme $rg(\Pi) = 1$, il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $a\Pi(f)+b\Pi(g) = 0$. Posons $h := af+bg \in \Pi(t)(\mathcal{B})$. On a : $\Pi h = 0$ et comme $\Pi(t)$ est un projecteur, $\Pi(t)h = h$. On a donc nécessairement $h = 0$ car sinon on aurait

$$\|h\| = \|\Pi(t)h - \Pi h\| \leq \|\Pi(t)-\Pi(0)\|\|h\| < \|h\|.$$

La famille (f,g) est donc une famille liée de $\Pi(t)(\mathcal{B})$ et par conséquent, $rg(\Pi(t)) \leq 1$. Supposons enfin qu'il existe $t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$ tel que $\Pi(t) = 0$. Alors $\|\Pi\| = \|\Pi(t)-\Pi\| < 1$ et $\|e\| = \|\Pi(e)\| \leq \|\Pi\|\|e\| < \|e\|$, ce qui est absurde. Donc, pour tout $t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$, $rg(\Pi(t)) = 1$. $\square$

Remarque 3.9. *Si $\mathcal{B}$ est de dimension finie, le lemme précédent peut se démontrer plus simplement en utilisant le fait que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.*

Remarque 3.10. *Comme $t \mapsto \Pi(t)$ est continue en 0 et que $\pi \in \mathcal{B}'$, on a $\lim_{t\to 0}\pi(\Pi(t)e) = \pi(\Pi e) = \pi(e) = 1$. Quitte à diminuer encore la valeur de R_κ, nous supposerons dorénavant que $\forall t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$, $\pi(\Pi(t)e) \neq 0$.*

Lemme 3.11. `[Définition de la valeur propre perturbée` $\lambda(t)$`.]` *Il existe une unique fonction $\lambda(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\overline{B}(0,R_\kappa),\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$, $Q(t)\Pi(t) = \lambda(t)\Pi(t)$. En outre, $\lambda(t)$ peut être définie par la formule (3.13).*

Démonstration. Rappelons (cf. lemme 3.9) que $Q(t)$ et $\Pi(t)$ commutent. Soit $t \in \overline{B}(0,R_\kappa)$. Le vecteur $v(t) := \Pi(t)e$ est un vecteur directeur de $\Pi(t)(\mathcal{B})$ et comme $\Pi(t)v(t) = v(t)$, on a

$$Q(t)v(t) = Q(t)\Pi(t)v(t) = \Pi(t)Q(t)v(t).$$

Donc $Q(t)v(t) \in \Pi(t)(\mathcal{B})$ et il existe donc un unique complexe $\lambda(t)$ tel que $Q(t)v(t) = \lambda(t)v(t)$. De même, il existe une unique forme linéaire $L(t) \in \mathcal{B}'$ telle que $\forall f \in \mathcal{B}$, $\Pi(t)f = L(t)(f)v(t)$. Par suite, $\forall f \in \mathcal{B}$, $Q(t)\Pi(t)f = L(t)(f)Q(t)v(t) = L(t)(f)\lambda(t)v(t) = \lambda(t)\Pi(t)f$ puis en considérant l'égalité précédente avec $f = e$, on obtient :

$$\lambda(t) = \frac{\pi\big(Q(t)\Pi(t)e\big)}{\pi(\Pi(t)e)}.$$

Enfin $\lambda(\cdot)$ est continue sur $\overline{B}(0,R_\kappa)$ par composition d'après le lemme 3.9 car $\pi \in \mathcal{B}'$. $\square$

3.5.5 Décomposition de $Q(t)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, au voisinage de $t = 0$.

Cette sous-section est consacrée aux preuves de (3.12) et (3.14) (ce qui termine la démonstration de la proposition 3.7).

Preuve de (3.12) et (3.14). D'après les lemmes 3.9 et 3.11 , on a, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$:

$$Q(t)^n = Q(t)^n \Pi(t) + Q(t)^n \Pi_0(t) = \lambda(t)^n \Pi(t) + Q(t)^n \Pi_0(t) = \lambda(t)^n \Pi(t) + (Q(t)\Pi_0(t))^n,$$

la dernière égalité provenant du fait que $\Pi_0(t)$ et $Q(t)$ commutent et que $\Pi_0(t)$ est un projecteur (lemme 3.9). Démontrons maintenant que $Q(t)\Pi_0(t)$ est bien l'endomorphisme $N(t)$ donné en (3.11). Autrement dit, on doit montrer que, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, on a

$$Q(t)\Pi_0(t) = N(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} z(zId - Q(t))^{-1} \, dz. \tag{3.24}$$

Le lemme ci-dessous montre plus généralement que l'on peut exprimer $Q(t)^n$ et $(Q(t)\Pi_0(t))^n$ sous forme d'intégrales de Dunford. Soient $\rho > 1 + \frac{1-\kappa}{2}$ et Γ_ρ le cercle orienté de centre $z = 0$ et de rayon ρ.

Lemme 3.12. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, on a :*

$$Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\rho} z^n (zId - Q(t))^{-1} \, dz, \tag{3.25}$$

$$\big(Q(t)\Pi_0(t)\big)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} z^n (zId - Q(t))^{-1} \, dz. \tag{3.26}$$

L'égalité (3.26) appliquée avec $n = 1$ donne l'égalité souhaitée (3.24). Appliquée avec n quelconque, elle fournit (3.14).

Démonstration du lemme 3.12. D'après (3.21) on a :

$$\oint_{\Gamma_\rho} z^n (z - Q(t))^{-1} \, dz = \oint_{\Gamma_\rho} z^n \bigg(\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-(k+1)} Q(t)^k \bigg) \, dz = \sum_{k=0}^{+\infty} \bigg(\oint_{\Gamma_\rho} z^{n-k-1} dz \bigg) \, Q(t)^k.$$

On déduit (3.25) des égalités $\oint_{\Gamma_\rho} z^{n-k-1} dz = 2i\pi\delta_{k,n}$.
Comme déjà remarqué, on a $(Q(t)\Pi_0(t))^n = Q(t)^n \Pi_0(t)$. Ainsi, en utilisant (3.25), la définition (3.23) de $\Pi_0(t)$, et enfin l'équation de la résolvante (3.20) et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
(2i\pi)^2 \, Q(t)^n \Pi_0(t) &= \bigg(\oint_{\Gamma_\rho} z^n R_t(z) \, dz \bigg) \bigg(\oint_{\Gamma_0} R_t(z') \, dz' \bigg) \\
&= \oint_{\Gamma_\rho} \oint_{\Gamma_0} z^n R_t(z) \, R_t(z') \, dz dz' \\
&= \oint_{\Gamma_\rho} \oint_{\Gamma_0} z^n \frac{1}{z - z'} \Big(R_t(z') - R_t(z) \Big) \, dz dz' \\
&= \oint_{\Gamma_0} R_t(z') \bigg(\oint_{\Gamma_\rho} \frac{z^n}{z - z'} dz \bigg) \, dz' - \oint_{\Gamma_\rho} z^n R_t(z) \bigg(\oint_{\Gamma_0} \frac{dz'}{z - z'} \bigg) \, dz.
\end{aligned}$$

D'où l'égalité (3.26) en observant que $\oint_{\Gamma_\rho} \frac{z^n}{z-z'} dz = 2i\pi z'^n$ et $\oint_{\Gamma_0} \frac{dz'}{z-z'} = 0$. □

Remarque 3.11. *Si l'on suppose uniquement, dans la proposition 3.7, que* $\lim_{t\to 0} Q(t) = Q$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ *(à la place de* $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$*), alors les conclusions de cette proposition subsistent, à l'exception des dernières assertions concernant la continuité de* $\Pi(\cdot)$*,* $N(\cdot)^n$ *et* $\lambda(\cdot)$ *sur* $\overline{B}(0, R_\kappa)$*. Cependant, on a encore* $\lim_{t\to 0} \Pi(t) = \Pi$ *(dans* $\mathcal{L}(\mathcal{B})$*) et* $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = 1$.

Chapitre 4

Théorèmes de renouvellement markoviens obtenus par la méthode spectrale usuelle

Dans ce chapitre, l'hypothèse de forte ergodicité du chapitre précédent est adaptée au cadre probabiliste markovien, à savoir : on dit qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états E est fortement ergodique sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ si sa probabilité de transition $Q(x, dy)$ opère continûment sur $\mathcal{B}$, si sa probabilité stationnaire π (dont on suppose ici l'existence) définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}$, et enfin si la suite des itérés Q^n de Q converge en norme d'opérateurs sur $\mathcal{B}$ vers le projecteur de rang 1 défini par : $\Pi(f) = \pi(f)\,1_E$, la notation usuelle 1_E désignant la fonction identiquement égale à 1 sur E. On notera que l'espace $\mathcal{B}$, composé ici de fonctions complexes mesurables sur E (ou de classes modulo π de telles fonctions), doit en particulier contenir la fonction 1_E.

Dans la section 4.1, on présente des exemples classiques de chaînes de Markov fortement ergodiques. Le cas des chaînes finies (Ex. 1) est évidemment le plus simple et on pourra utiliser les résultats de l'étude faite dans la section 3.2. Les premiers exemples de chaînes fortement ergodiques (non finies) présentés ensuite sont assez simples : il s'agit du modèle itératif usuel sur $[0, 1]$ déduit de la transformation $x \mapsto 2x$ modulo 1 (Ex. 2), puis de la chaîne sur $\mathbb{R}$ dont la probabilité de transition $Q(x, \cdot)$ est définie par la loi uniforme sur $[0, x]$ (Ex. 3). Les deux exemples qui suivent concernent des modèles plus généraux, donnés d'une part par les chaînes dites v-géométriquement ergodiques (Ex. 4), d'autre part par les chaînes ρ-mélangeantes (Ex. 5). Les modèles itératifs Lipschitziens, qui fournissent aussi une classe générale de chaînes de Markov fortement ergodiques, seront étudiés dans le chapitre 6.

Dans la section 4.2, étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on rappelle la définition des noyaux de Fourier $Q(t)$ associés à ξ et à la probabilité de transition de $(X_n)_{n\geq 0}$, ainsi que le lien entre les itérés $Q(t)^n$ de $Q(t)$ et la fonction caractéristique de la fonctionnelle additive $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(X_k)$. Ensuite, dans la section 4.3, en utilisant les résultats du chapitre précédent, on introduit des hypothèses de type opérateur pour vérifier l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2. Les conditions obtenues sont celles de [34, 14, 41, 4], à savoir, outre l'hypothèse de forte ergodicité sur $\mathcal{B}$: une condition de régularité sur l'application $Q(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ et une condition spectrale dite de non-arithméticité.

Dans la section 4.4, on énonce les théorèmes de renouvellement que l'on peut déduire du chapitre 2 en utilisant les hypothèses de type opérateur. On y retrouve les énoncés établis dans [34, 14, 41] en dimension 1 et dans [4] en dimension $d \geq 2$. Dans la section 4.5, les théorèmes de renouvellement sont appliqués aux exemples mentionnés ci-dessus. Plus précisément, on verra que les conditions de régularité sur $Q(\cdot)$ sont particulièrement bien adaptées lorsque l'espace $\mathcal{B}$ relatif à la forte ergodicité est une algèbre de Banach et que les fonctions coordonnées ξ_i de ξ sont dans $\mathcal{B}$. Ce cas de figure sera illustré par les exemples 1 et 2, pour lesquels on réduira en outre la condition spectrale de non-arithméticité à des conditions très simples de type non-lattice. Pour les exemples 4 et 5, on verra que les hypothèses de régularité sur $Q(\cdot)$ conduisent à des conditions de moment (de type opérateur) assez contraignantes (voir également à ce sujet la dernière section de ce chapitre). Dans la section 4.6, on étend nos résultats au cas lattice.

4.1 Chaînes de Markov fortement ergodiques.

4.1.1 Notations générales et définition de la forte ergodicité

Dans ce chapitre, on désignera par $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x, dy)$, et de probabilité Q-invariante π (dont on suppose l'existence).

Si X_1 et X_2 sont des espaces de Banach, la notation $X_1 \hookrightarrow X_2$ signifie que $X_1 \subset X_2$ et que l'application identique est continue de X_1 dans X_2. On note $\mathcal{L}^1(\pi)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes définies et π-intégrables sur E.

Hypothèse (B). *Un espace de Banach $\mathcal{B}$ vérifie l'hypothèse* **(B)** *si $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\pi)$ et $1_E \in \mathcal{B}$, ou bien si $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{L}^1(\pi)$ et la classe $Cl(1_E)$ de 1_E (modulo π) est dans $\mathcal{B}$.*

L'hypothèse (**B**) implique donc que $\pi \in \mathcal{B}'$ et nous permet d'introduire le projecteur $\Pi \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, de rang 1, défini pour tout $f \in \mathcal{B}$ par :

$$\Pi f = \pi(f) 1_E. \tag{4.1}$$

Définition 4.1. *Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse* (**B**). *On dira que $(X_n)_{n\geq 0}$ est fortement ergodique relativement à $\mathcal{B}$ si Q opère continûment sur $\mathcal{B}$ (i. e. $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$) et si Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$, avec Π défini en (4.1).*

L'hypothèse de forte ergodicité, introduite et discutée au chapitre 3, signifie donc ici que la suite des itérés $(Q^n)_n$ de l'opérateur de transition Q converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ vers le projecteur Π de (4.1). D'après la remarque 3.1, elle est équivalente à la condition suivante :

$$\exists \hat{\kappa} \in [0, 1[, \ \exists C > 0, \ \forall n \geq 1, \quad \|Q^n - \Pi\| \leq C \, \hat{\kappa}^n, \tag{4.2}$$

où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

4.1.2 Trois exemples simples.

• **Exemple 1. Chaînes de Markov finies.**

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov finie, à savoir l'espace d'états $E = \{1, \ldots, K\}$ est fini. Soit $Q = (q(i,j))$ sa matrice de transition. On désigne ici par $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel (de dimension finie) des fonctions de E dans $\mathbb{C}$. La matrice de transition Q induit sur $\mathcal{B}$ un opérateur de transition, noté encore Q, défini par

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall i \in E,\ (Qf)(i) = \sum_{j=1}^{K} q(i,j) f(j). \tag{4.3}$$

L'espace $\mathcal{B}$ étant de dimension finie, on peut considérer n'importe quelle norme sur $\mathcal{B}$, par exemple la norme $\|\cdot\|_\infty$ utilisée dans la section 3.2. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et apériodique si Q est irréductible et apériodique au sens des définitions données dans la section 3.2. La proposition suivante est classique et a été démontrée dans le chapitre 3 (cf. prop. 3.6).

Proposition 4.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov finie, irréductible et apériodique. Il existe une unique probabilité π Q-invariante, et on a (4.2) sur $\mathcal{B}$.*

• **Exemple 2** ($E = [0,1]$) : $X_n = \frac{1}{2}\big(X_{n-1} + \theta_n\big)$, avec $\theta_n \sim Bern(1/2)$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov d'espace d'états $E = [0,1]$, définie par la donnée d'une v.a. X_0 à valeurs dans $[0,1]$, et par la formule itérative suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \frac{1}{2}\big(X_{n-1} + \theta_n\big),$$

où $(\theta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. indépendante de X_0, toutes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Il est facile de voir que sa probabilité de transition Q est définie, pour toute fonction mesurable complexe bornée f sur E, par :

$$\forall x \in E, \quad Qf(x) = \frac{1}{2}\big(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\big). \tag{4.4}$$

On note ν la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On vérifie facilement que $\nu(Qf) = \nu(f)$, autrement dit ν est une probabilité Q-invariante sur $[0,1]$. L'opérateur Q précédent est un exemple classique d'opérateurs de transfert (ici associé à la transformation $x \mapsto 2x$ modulo 1), voir par exemple [18, 19].

Soit $\mathcal{B} = Lip(E)$ l'espace de Banach complexe des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|$ définie pour tout $f \in Lip(E)$ par

$$\|f\| = m(f) + \|f\|_\infty,$$

$$\text{avec} \qquad m(f) = \sup_{(x,y)\in E^2,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in E} |f(x)|.$$

Proposition 4.2. *L'opérateur Q défini par (4.4) est fortement ergodique sur $Lip(E)$, avec Π dans (4.2) associée à la mesure de Lebesgue ν sur $[0,1]$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour tout $u \in Lip(E)$, on a $Qu \in Lip(E)$ et

$$m(Qu) \leq \frac{1}{2} m(u). \tag{4.5}$$

Comme Q est clairement linéaire, Q est un endomorphisme continu de $Lip(E)$. La suite de la preuve de cette proposition utilise les résultats du lemme suivant :

Lemme 4.1. *Soit $H := \{g \in Lip(E), \nu(g) = 0\}$. Alors H est un sous-espace fermé de $Lip(E)$, stable par Q, et pour tout $g \in H$, on a $\|g\| \leq 3\, m(g)$.*

Démonstration. H est fermé car ν définit clairement une forme linéaire continue sur $Lip(E)$, et il est stable par Q car ν est Q-invariante. Soit $g \in H$. Comme $\mathrm{Re}\,(g)$ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$, il existe $x_1 \in E$ tel que $\mathrm{Re}\,(g)(x_1) = 0$. De même, il existe $x_2 \in E$ tel que $\mathrm{Im}\, g(x_2) = 0$. Soit $x \in [0,1]$. L'égalité

$$g(x) = (\mathrm{Re}\,(g)(x) - \mathrm{Re}\,(g)(x_1)) + i(\mathrm{Im}\,(g)(x) - \mathrm{Im}\,(g)(x_2))$$

implique alors que $|g(x)| \leq m(g)(|x - x_1| + |x - x_2|) \leq 2m(g)$. Donc $\|g\|_\infty \leq 2m(g)$. □

Terminons maintenant la preuve de la proposition 4.2. Montrons que la suite (Q^n) converge dans $\mathcal{L}(Lip(E))$, vers le projecteur $\nu(\cdot)1_E$. Soient $f \in Lip(E)$ et $g := f - \nu(f)1_E$. Comme $g \in H$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q^n g \in H$ avec $\|Q^n g\| \leq 3m(Q^n g) \leq \frac{3}{2^n} m(g)$ d'après le lemme 4.1 et (4.5). Par conséquent, comme $Q1_E = 1_E$ et $m(g) = m(f)$, on a :

$$\begin{aligned} \|Q^n f - \nu(f)1_E\| &= \|Q^n(f - \nu(f)1_E)\| \\ &\leq \frac{3}{2^n} m(f) \\ &\leq \frac{3}{2^n} \|f\|. \end{aligned}$$

□

• Exemple 3 ($E = \mathbb{R}$) : cas où $Q(x,\cdot)$ est la loi uniforme sur $[0,x]$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov, à valeurs dans $E = \mathbb{R}$, de probabilité de transition Q définie pour toute fonction mesurable complexe bornée f sur E par :

$$Qf(x) = \int_0^1 f(tx)dt,\ x \in E. \tag{4.6}$$

En d'autres termes, la probabilité de transition $Q(x,\cdot)$ est la loi uniforme sur $[0,x]$ (resp. $[x,0]$) si $x > 0$ (resp. $x < 0$), et la distribution de Dirac δ_0 en 0 si $x = 0$. On a clairement $Qf(0) = f(0)$, donc δ_0 est une probabilité Q-invariante.

Soit $\gamma > 0$. Considérons l'espace complexe $\mathcal{B}_\gamma$ des fonctions f de E dans $\mathbb{C}$ telles que

$$m_\gamma(f) := \sup_{(x,y)\in E^2,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|(1+|x|)^\gamma(1+|y|)^\gamma} < +\infty. \tag{4.7}$$

On vérifie facilement que si $f \in \mathcal{B}_\gamma$, alors on a

$$|f|_\gamma := \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{\gamma+1}} < +\infty. \tag{4.8}$$

On munit $\mathcal{B}_\gamma$ de la norme $\|\cdot\|$ définie pour tout $f \in \mathcal{B}_\gamma$ par :

$$\|f\| = m_\gamma(f) + |f|_\gamma \tag{4.9}$$

et on montre classiquement que $(\mathcal{B}_\gamma, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Proposition 4.3. *L'opérateur Q défini par (4.6) est fortement ergodique sur $\mathcal{B}_\gamma$, avec Π dans (4.2) définie par $\Pi(f) = f(0)1_E$.*

Démonstration. Un calcul élémentaire montre que, pour tout $u \in \mathcal{B}_\gamma$, on a $Qu \in \mathcal{B}_\gamma$ car on a

$$m_\gamma(Qu) \leq \frac{1}{2} m_\gamma(u) \tag{4.10}$$

et $|Qu|_\gamma \leq |u|_\gamma$. Comme Q est clairement linéaire, on a $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma)$.

Lemme 4.2. *Soit $H := \{g \in \mathcal{B}_\gamma,\ g(0) = 0\}$. Alors H est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}_\gamma$, stable par Q, et pour tout $g \in H$, on a $\|g\| \leq 2\, m_\gamma(g)$.*

Démonstration. Les deux premiers points résultent du fait que $\delta_0 \in \mathcal{B}'_\gamma$ et que δ_0 est Q-invariante. En outre, pour tous $g \in H$ et $x \in \mathbb{R}$, on

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \leq m_\gamma(g)|x|(1+|x|)^\gamma \leq m_\gamma(g)(1+|x|)^{\gamma+1}.$$

Donc $|g|_\gamma \leq m_\gamma(g)$. □

Montrons maintenant que la suite (Q^n) converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma)$ vers Π comme défini dans l'énoncé. Soit $f \in \mathcal{B}_\gamma$. Posons $g := f - \delta_0(f)$. Comme $g \in H$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q^n g \in H$ avec $\|Q^n g\| \leq 2 m_\gamma(Q^n g) \leq 2\frac{1}{2^n} m_\gamma(g)$ d'après le lemme 4.2 et (4.10). Par conséquent, comme $Q1_E = 1_E$ et $m(g) = m(f)$, on a :

$$\begin{aligned} \|Q^n f - \delta_0(f)\| &= \|Q^n(f - \delta_0(f))\| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} m(f) \end{aligned}$$

□

Signalons que les espaces de type $\mathcal{B}_\gamma$ seront aussi utilisés dans le chapitre 6 pour l'étude des modèles itératifs lipschitziens.

Les exemples 4 et 5 ci-dessous concernent, non plus des exemples particuliers de chaînes de Markov, mais des modèles markoviens classiques.

4.1.3 Exemple 4 : les chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques.

Fixons une fonction mesurable v de E dans $[1, +\infty[$ et considérons l'espace vectoriel complexe $\mathcal{B}_v$ des fonctions mesurables $f : E \to \mathbb{C}$ telles que f/v soit bornée sur E. L'espace $\mathcal{B}_v$ contient clairement toutes les fonctions complexes bornées sur E (en particulier 1_E) et on vérifie classiquement que $\mathcal{B}_v$, muni de la norme $\|\cdot\|_v$ définie pour tout $f \in \mathcal{B}_v$ par :

$$\|f\|_v = \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{v(x)}$$

est un espace de Banach. Remarquons que $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$ si et seulement si $Qv \in \mathcal{B}_v$.

Définition 4.2. *La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ (ou Q) est dite v-géométriquement ergodique si Q est fortement ergodique sur $(\mathcal{B}_v, \|\cdot\|_v)$, autrement dit si $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$ et si Q vérifie la condition (4.2) sur $(\mathcal{B}_v, \|\cdot\|_v)$, à savoir :*

$$\exists \hat{\kappa} \in [0, 1[\ \exists C > 0,\ \forall n \geq 1, \forall f \in \mathcal{B}_v,\ \ \|Q^n f - \pi(f)1_E\|_v \leq C\, \hat{\kappa}^n \|f\|_v. \tag{4.11}$$

On notera que la définition 4.2, comme l'hypothèse de forte ergodicité en général, présuppose l'existence de la probabilité Q-invariante π. En outre ici, (4.11) requiert que v soit π-intégrable, et cette dernière condition implique que $\mathcal{B}_v$ vérifie l'hypothèse (**B**) (i. e. $\mathcal{B}_v \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\pi)$).

Sous des hypothèses d'irréductibilité et d'apériodicité, il est établi dans [62] que la propriété (4.11) est équivalente aux conditions classiques suivantes : il existe $N \in \mathbb{N}^*$, une mesure positive non nulle ν sur $(E, \mathcal{E})$ et $C \in \mathcal{E}$ tel que $\nu(C) > 0$ de sorte que

$$\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E},\ Q^N(x, A) \geq \nu(A)1_C(x), \tag{4.12}$$

$$\exists \rho \in [0, 1[,\ \exists M > 0,\ Q^N v \leq \rho v + M1_C. \tag{4.13}$$

Nous renvoyons à [62] pour ce résultat, pour des compléments sur les conditions (4.12) (4.13), appelées respectivement conditions de "minoration" et de "drift", et enfin pour des exemples de chaînes v-géométriquement ergodiques.

Nous adoptons ici une approche fonctionnelle différente de [62]. Cette approche est illustrée ci-dessous par un exemple de processus autorégressif. Commençons par rappeler la définition générale de quasi-compacité.

Définition 4.3. *Soient $\mathcal{B}$ un espace de Banach complexe quelconque et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $r(T) = 1$. On dit que T est quasi-compact sur $\mathcal{B}$ s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $p_i \in \mathbb{N}^*$ $(i = 1, \ldots, m)$ tels que l'on ait*

$$\mathcal{B} = \oplus_{i=1}^m \operatorname{Ker}(T - \lambda_i Id)^{p_i} \oplus H, \tag{4.14}$$

avec H, s.e.v. fermé de $\mathcal{B}$, invariant par T, tel que $r(T_H) < 1$, où l'on a noté T_H la restriction de T sur H, et avec λ_i tel que $|\lambda_i| > r(T_{|H})$ et $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda_i Id)^{p_i} < +\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$.

La proposition suivante, admise ici et prouvée dans [43, 47], montre que les conditions de "minoration" et de "drift" ci-dessus impliquent la quasi-compacité de Q sur $\mathcal{B}_v$.

Proposition 4.4. *Supposons que les conditions (4.12) (4.13) soient satisfaites. Alors le rayon spectral $r(Q)$ de Q sur $\mathcal{B}_v$ est égal à 1, et Q est quasi-compact sur $\mathcal{B}_v$.*

La propriété $r(Q) = 1$ s'établit facilement sous la condition (4.13). En effet, on a $Q^N v \leq \rho v + M$, et Q^N étant un opérateur positif de $\mathcal{B}_v$ tel que $Q1_E = 1_E$, on obtient plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Q^{nN} v \leq \rho^n v + \frac{M}{1-\rho}. \tag{4.15}$$

On en déduit que $\sup_n \|Q^{nN} v\|_v < +\infty$. Par un argument de division euclidienne, il vient que Q est à itérés bornés sur $\mathcal{B}_v$: $\sup_k \|Q^k v\|_v < +\infty$. D'où $r(Q) \leq 1$ d'après (3.2). Comme $Q1_E = 1_E$, on a bien $r(Q) = 1$.

Un exemple (modèle autorégressif). Soit X_0 une variable aléatoire réelle. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de v.a.r définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$X_n = aX_{n-1} + \theta_n,$$

avec $a \in]-1,1[\setminus\{0\}$, et $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d et indépendante de X_0. On suppose que θ_1 admet une densité de probabilité p continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et en outre que θ_1 est de carré intégrable, i.e. que $\mathbb{E}[\theta_1^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 p(y)dy < +\infty$.

On vérifie facilement que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout borélien A de $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x, A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A(ax + y)\, p(y)\, dy.$$

Nous démontrons ci-dessous que les conditions (4.12) (4.13) sont satisfaites sur cet exemple. Sous des hypothèses supplémentaires, nous en déduirons la forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}_v$ en étudiant directement les éléments propres périphériques de Q.

• *Etude de la condition (4.12).* Soit $c > 0$. La condition (4.12) est vérifiée avec $N = 1$, $C = [-c, c]$ et une mesure positive non nulle ν (dépendant de p et de C). En effet, posons, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $p_c(z) := \min_{u\in C} p(z + u)$. Comme p est continue et $p > 0$, on a $0 < p_c \leq p$ et p_c est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} p_c(z)dz \in]0, 1]$. Considérons la mesure positive non nulle ν définie pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ par :

$$\nu(B) = \int_B p_c(z)dz.$$

Clairement on a $\nu(C) = \nu([-c, c]) > 0$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in C$, on a

$$Q(x, A) = \int_A p(z - ax)dz \geq \nu(A).$$

En effet, si $x \in C$, on a $-ax \in C$ et donc pour tout $z \in \mathbb{R}$, $p(z - ax) \geq p_c(z)$. Comme $Q(\cdot, A) \geq 0$, la propriété (4.12) est établie comme souhaitée.

• *Etude de la condition (4.13).* Soit $v(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $Qv \in \mathcal{B}_v$ et donc que Q opère dans $\mathcal{B}_v$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(Qv)(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 + (ax + y)^2)p(y)dy = a^2 v(x) + 2a\mathbb{E}[\theta_1]x + 1 - a^2 + \mathbb{E}[\theta_1^2].$$

Considérons $\rho \in]a^2, 1[$ et $c > 0$ tels que, pour tout $|x| \geq c$, on ait

$$\frac{\left|2a\mathbb{E}[\theta_1]x + 1 - a^2 + \mathbb{E}[\theta_1^2]\right|}{v(x)} \leq \rho - a^2.$$

Pour $|x| \geq c$, on a $Qv(x) \leq \rho v(x)$, et pour $x \in [-c, c]$, on a $Qv(x) \leq a^2 v(x) + M$ avec

$$M := \max_{x \in [-c,c]} \left|2a\mathbb{E}[\theta_1]x + 1 - a^2 + \mathbb{E}[\theta_1^2]\right|.$$

Par conséquent, la condition (4.13) est vérifiée avec $N = 1$ et $C = [-c, c]$.

• *Etude du spectre périphérique de* Q. D'après la proposition 4.4, on sait que $r(Q) = 1$ et que Q est quasi-compact sur $\mathcal{B}_v$, avec ici $v(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Supposons en outre que p soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^{1+\varepsilon} |p'(x)| < +\infty. \tag{4.16}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$. Nous allons montrer que $Ker(Q - Id) = \mathbb{C} \cdot 1_{\mathbb{R}}$ et que si $\lambda \neq 1$, alors $Ker(Q - \lambda Id) = \{0\}$. Ceci démontrera bien la forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}_v$ car on sait en outre que Q est à itérés bornés sur $\mathcal{B}_v$, de sorte que la propriété (4.14) sera alors vérifiée avec $m = 1$, $\lambda_1 = 1$ et $p_1 = 1$.

Soit $f \in Ker(Q - I)$. Remarquons tout d'abord que f est bornée sur $\mathbb{R}$ car on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf. (4.15) avec $N = 1$ ici)

$$|f| = |\lambda^n f| = |Q^n f| \leq Q^n(|f|) \leq \|f\|_v Q^n v \leq \|f\|_v (\rho^n v + \frac{M}{1 - \rho})$$

et donc

$$|f| \leq \lim_{n \to +\infty} \|f\|_v (\rho^n v + \frac{M}{1 - \rho}) \leq \|f\|_v \frac{M}{1 - \rho}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda f(x) = (Qf)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(ax + y) p(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(z) p(z - ax) dz.$$

D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(z)p(z - ax)dz$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -a \int_{\mathbb{R}} f(z)p'(z - ax)dz$. En effet, l'hypothèse (4.16) permet de vérifier que la condition usuelle de domination locale de la dérivée partielle par rapport à x de $(x, z) \mapsto f(z)p(z - ax)$ est satisfaite. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda f'(x) = -a \int_{\mathbb{R}} f(z)p'(z - ax)dz$. L'égalité précédente implique que f' est bornée sur $\mathbb{R}$, et en intégrant par parties cette même égalité, on obtient que

$$\lambda f'(x) = a \int_{\mathbb{R}} f'(z) p(z - ax) dz = a \int_{\mathbb{R}} f'(ax + y) p(y) dy,$$

car, p et p' étant intégrables sur $\mathbb{R}$, $\lim_{|u| \to +\infty} p(u) = 0$. En d'autres termes, $Qf' = \frac{\lambda}{a} f'$. Comme $|\frac{\lambda}{a}| = \frac{1}{|a|} > 1$ et $r(Q) = 1$, on en déduit que $f' = 0$ et donc que f est constante sur $\mathbb{R}$. On a ainsi montré que la seule valeur propre de module 1 de Q est 1, et que l'espace propre associé est $\mathbb{C} \cdot 1_{\mathbb{R}}$.

En conclusion, si θ_1 admet une densité de probabilité p de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement positive telle que $\int_{\mathbb{R}} y^2 p(y)dy < +\infty$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^{1+\varepsilon}|p'(x)| < +\infty$, alors Q est fortement ergodique sur $(\mathcal{B}_v, \|\cdot\|_v)$. Remarquons pour finir que, si θ_1 est une v.a. gaussienne, les hypothèses précédentes sur θ_1 sont satisfaites.

4.1.4 Exemple 5 : les chaînes ρ-mélangeantes.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le coefficient de ρ-mélange à l'horizon k, noté $\rho(k)$, d'une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ de v.a. est défini par :

$$\rho(k) := \sup\big\{Corr(f,g),\ f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{G}_1^n),\ g \in \mathbb{L}^2(\mathcal{G}_{n+k}^\infty)\big\}, \tag{4.17}$$

où, pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ tels que $p \leq q$, on a noté $\mathcal{G}_p^q := \sigma(Z_p, \cdots, Z_q)$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $Z_p, \cdots, Z_q$, et où le coefficient de corrélation $Corr(f,g)$ de f et g est classiquement défini par :

$$Corr(f,g) := \frac{\mathbb{E}[fg] - \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g]}{\sqrt{\mathbb{E}[(f-\mathbb{E}[f])^2]}\sqrt{\mathbb{E}[(g-\mathbb{E}[g])^2]}}.$$

La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite ρ-mélangeante si $\lim_{k\to+\infty} \rho(k) = 0$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$, de probabilité de transition $Q(x,dy)$, admettant une probabilité Q-invariante π. On note $(\mathbb{L}^2(\pi), \|\cdot\|_2)$ l'espace de Lebesgue usuel associé à $(E, \mathcal{E}, \pi)$. Il est facile de voir que Q est un opérateur contractant (au sens large) de $\mathbb{L}^2(\pi)$: $\forall f \in \mathbb{L}^2(\pi),\ \|Qf\|_2 \leq \|f\|_2$.

Nous admettrons la proposition classique suivante, prouvée dans [68].

Proposition 4.5. *La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est ρ-mélangeante si et seulement si Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B} = \mathbb{L}^2(\pi)$, c'est-à-dire s'il existe $\hat{\kappa} \in [0,1[$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall n \geq 1, \forall f \in \mathbb{L}^2(\pi), \quad \|Q^n f - \Pi(f)\|_2 \leq C\,\hat{\kappa}^n \|f\|_2, \tag{4.18}$$

avec : $\Pi(f) = \pi(f)1_E$.

La proposition suivante, établie aussi dans [68], montre que si Q est fortement ergodique sur $\mathbb{L}^2(\pi)$, alors pour tout $p \in]1, +\infty[$, Q est également fortement ergodique sur l'espace de Lebesgue usuel $(\mathbb{L}^p(\pi), \|\cdot\|_p)$ associé à $(E, \mathcal{E}, \pi)$:

Proposition 4.6. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov ρ-mélangeante. Pour tout $p \in]1, +\infty[$, Q est fortement ergodique sur $\mathbb{L}^p(\pi)$, c'est-à-dire il existe $\hat{\kappa}_p \in [0,1[$ et $C_p > 0$ tels que l'on ait, toujours avec $\Pi(f) = \pi(f)1_E$:*

$$\forall n \geq 1, \forall f \in \mathbb{L}^p(\pi), \quad \|Q^n f - \Pi(f)\|_p \leq C_p\,\hat{\kappa}_p^n \|f\|_p. \tag{4.19}$$

Démonstration. Soit $p \in [1, +\infty]$. La norme usuelle de $\mathbb{L}^p(\pi)$ est $\|\cdot\|_p = \pi(|\cdot|^p)^{\frac{1}{p}}$. La norme subordonnée de $\mathcal{L}(\mathbb{L}^p(\pi))$ est aussi notée $\|\cdot\|_p$. Comme π est Q-invariante, Q est un opérateur contractant (au sens large) de $\mathbb{L}^p(\pi)$: $\|Q\|_p \leq 1$. Puisque Π est aussi un opérateur contractant (au sens large) de $\mathbb{L}^\infty(\pi)$ et de $\mathbb{L}^1(\pi)$, on notera en particulier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\|Q^n - \Pi\|_\infty \leq 2$ et $\|Q^n - \Pi\|_1 \leq 2$. Considérons maintenant $p \in]2, +\infty[$. D'après le théorème de Riesz-Thorin (cf. [7]), on a :

$$\|Q^n - \Pi\|_p \leq \|Q^n - \Pi\|_2^{1-\frac{2}{p}} \|Q^n - \Pi\|_\infty^{\frac{2}{p}}.$$

Par conséquent, d'après (4.18), Q est fortement ergodique sur $\mathbb{L}^p(\pi)$ car :

$$\|Q^n - \Pi\|_p \leq 2^{\frac{2}{p}} C^{1-\frac{2}{p}} (\hat{\kappa}^{1-\frac{2}{p}})^n.$$

On démontre de même que Q est fortement ergodique sur $\mathbb{L}^p(\pi)$, pour $p \in]1, 2[$, en utilisant le théorème de Riesz-Thorin avec les espaces $\mathbb{L}^1(\pi)$ et $\mathbb{L}^2(\pi)$. □

4.2 Fonctionnelles additives et noyaux de Fourier.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x, dy)$, de probabilité Q-invariante π. Dans toute la suite, on désigne par μ la loi initiale de $(X_n)_{n\geq 0}$, c'est-à-dire la loi de X_0.

Soit $x \mapsto \xi(x) = (\xi_1(x), \ldots, \xi_d(x))$ une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $(S_n)_n$ la suite de v.a. suivante, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(X_k). \tag{4.20}$$

La suite $(S_n)_n$ est appelée la *fonctionnelle additive* de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ associée à ξ.

4.2.1 Définition des noyaux et opérateurs de Fourier associés à Q.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on note $Q_\xi(t)$, ou plus simplement $Q(t)$, le noyau de Fourier défini par :

$$Q(t)(x, dy) = e^{i\langle t, \xi(y)\rangle} Q(x, dy). \tag{4.21}$$

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)**. Soit $t \in \mathbb{R}^d$ tel que $Q(t)(\,.\,, dy)$ définit un endomorphisme continu de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Notant aussi $Q(t)$ cet opérateur de $\mathcal{B}$, on a donc, pour tous $x \in E$ et $f \in \mathcal{B}$:

$$(Q(t)f)(x) := \int_E f(y) Q(t)(x, dy) = \int_E e^{i\langle t, \xi(y)\rangle} f(y) Q(x, dy). \tag{4.22}$$

Exemple : Cas des chaînes de Markov finie.
On conserve les notations de l'exemple 1 page 85. Alors, pour $t \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de Fourier $Q(t)$ est défini sur l'algèbre de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions de $E = \{1, \cdots, K\}$ dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall k \in E, \quad (Q(t)f)(k) = Q(e^{i\langle t, \xi(\cdot)\rangle} f) = \sum_{j=1}^{K} e^{i\langle t, \xi(j)\rangle} f(j) q(k, j). \tag{4.23}$$

Remarquons que $Q(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$. En effet, rappelons que $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. On pose

$$C := \max\left\{\|\xi(j)\|,\ j = 1, \ldots, K\right\}.$$

On a pour tous $(s,t) \in (\mathbb{R}^d)^2$

$$|e^{i\langle\, t, \xi(\cdot)\,\rangle} - e^{i\langle\, s, \xi(\cdot)\,\rangle}| \leq |\langle\, t - s, \xi(\cdot)\,\rangle| \leq C\,\|t - s\|,$$

d'où, par la remarque 3.4, on a pour tout $f \in \mathcal{B}$:

$$\|Q(t)f - Q(s)f\|_\infty = \|Q((e^{i\langle\, t, \xi(\cdot)\,\rangle} - e^{i\langle\, s, \xi(\cdot)\,\rangle})f)\|_\infty \leq C\,\|t - s\|\,\|f\|_\infty.$$

Ainsi on a $\|Q(t) - Q(s)\|_\infty \leq C\,\|t - s\|$, et $Q(\cdot)$ est lipschitzienne donc continue sur $\mathbb{R}^d$.

Plus précisément, puisque $Q(\cdot)$ s'identifie à la matrice $(q_{kl}e^{i\langle\,\cdot, \xi(l)\,\rangle})$ dont les coefficients sont clairement des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto Q(t)$ est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, avec pour tous $k \in \mathbb{N}$, $(p_1, \cdots, p_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $p_1 + \cdots + p_d = k$, et tous $t \in \mathbb{R}^d$ et $f \in \mathcal{B}$:

$$\Big(\frac{\partial^k Q(t)}{\partial t_1^{p_1} \cdots \partial t_d^{p_d}}\Big)(f) = Q(i^k \xi_1^{p_1} \ldots \xi_d^{p_d} e^{i\langle\, t, \xi\,\rangle} f) = \sum_{j=1}^{K} i^k \xi_1^{p_1}(j) \ldots \xi_d^{p_d}(j) e^{i\langle\, t, \xi(j)\,\rangle} f(j) q(\cdot, j).$$

4.2.2 Lien entre la fonction caractéristique de S_n et l'opérateur $Q(\cdot)$.

L'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2 fait appel, pour $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable donnée, à la fonction (de type) caractéristique définie comme l'espérance de la v.a. $f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}$. Dans le cadre markovien de ce chapitre, l'espérance dépend de la probabilité de transition Q, mais aussi de la probabilité initiale μ. À cet effet, nous utiliserons les notations usuelles $\mathbb{P}_\mu$ et $\mathbb{E}_\mu$ pour faire référence à la probabilité initiale μ. Ainsi la fonction (de type) caractéristique de l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ sera $\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises l'égalité du lemme suivant, énoncée pour le moment pour toute fonction complexe f mesurable bornée sur E et toute loi de probabilité initiale μ. Lorsque $Q(t)$ aura une action continue sur un espace (de fonctions complexes) $\mathcal{B}$, la formule sera appliquée avec $\mu \in \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{B}$:

Lemme 4.3. *On a*

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}\big] = \mu(Q(t)^n f).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur n. Soit $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ la tribu engendrée par les v. a. $X_0, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Notons f_t l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $x \in E$ par :

$$f_t(x) := e^{i\langle\, t, \xi(x)\,\rangle} f(x),\ t \in \mathbb{R}^d.$$

En considérant (4.20) avec $n = 1$, on a :

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_1)e^{i\langle\, t, S_1\,\rangle}] = \mathbb{E}_\mu[f_t(X_1)] = \mathbb{E}_\mu\big[\mathbb{E}_\mu[f_t(X_1) \mid \sigma(X_0)\big]$$

et donc, par la propriété de Markov, $\mathbb{E}_\mu[f(X_1)e^{i\langle t,S_1\rangle}] = \mathbb{E}_\mu[(Qf_t)(X_0)]$. Comme $Qf_t = Q(t)f$, on obtient donc $\mathbb{E}_\mu[f(X_1)e^{itS_1}] = \mathbb{E}_\mu[(Q(t)f)(X_0)] = \mu(Q(t)f)$, c'est-à-dire l'égalité du lemme 4.3 pour $n = 1$.
Supposons l'égalité du lemme 4.3 établie pour un certain entier $n \geq 1$. On a alors avec (4.20) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu[f(X_{n+1})e^{i\langle t,S_{n+1}\rangle}] &= \mathbb{E}_\mu[f_t(X_{n+1})e^{i\langle t,S_n\rangle}] \\
&= \mathbb{E}_\mu\big[\mathbb{E}_\mu[f_t(X_{n+1})e^{i\langle t,S_n\rangle} \mid \sigma(X_0,\ldots,X_n)]\big] \\
&= \mathbb{E}_\mu\big[e^{i\langle t,S_n\rangle}\mathbb{E}_\mu[f_t(X_{n+1}) \mid \sigma(X_0,\ldots,X_n)]\big]
\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{E}_\mu[f(X_{n+1})e^{i\langle t,S_{n+1}\rangle}] = \mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,S_n\rangle}(Qf_t)(X_n)]$ d'après la propriété de Markov. Finalement, en appliquant l'hypothèse de récurrence à la fonction mesurable bornée $Q(t)f$, on obtient :

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_{n+1})e^{i\langle t,S_{n+1}\rangle}] = \mathbb{E}_\mu[(Q(t)f)(X_n)e^{i\langle t,S_n\rangle}] = \mu\big(Q(t)^n(Q(t)f)\big) = \mu(Q(t)^{n+1}f).$$

L'égalité du lemme 4.3 est vérifiée avec l'entier $n+1$ et est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Remarquons que le cas particulier $f = 1_E$ nous donne l'expression suivante de la fonction caractéristique de S_n :

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}_\mu[e^{i\langle t,S_n\rangle}] = \mu(Q(t)^n 1_E). \tag{4.24}$$

4.3 Etude de la condition $\mathcal{R}_d(m)$ par la méthode spectrale usuelle.

On conserve les données et notations introduites au début de la section 4.2. Le lemme 4.3 montre que l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$, introduite au chapitre 2 pour établir les théorèmes de renouvellement, se ramène à l'étude des itérés $Q(t)^n$. C'est l'objet de la méthode spectrale de Nagaev-Guivrac'h, que nous appliquons dans les deux sous-sections suivantes, en introduisant des hypothèses de type opérateur et en utilisant les résultats du chapitre précédent.

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)**. Les opérateurs de Fourier associés à Q et ξ ont été définis en (4.21). Soit $m \in \mathbb{R}_+$. Introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$.

(i) Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$ (cf. définition 4.1),

(ii) Pour tout ouvert borné $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$, $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{O}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$.

Remarque 4.1. *En pratique, lorsque l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)(ii)$ est satisfaite, alors pour tous $k \in \{1,\cdots,\lfloor m\rfloor\}$ et $(p_1,\cdots,p_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $p_1+\cdots+p_d = k$, l'opérateur $\frac{\partial^k Q(t)}{\partial t_1^{p_1}\cdots\partial t_d^{p_d}}$ est l'opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ associé au noyau*

$$Q_{(p_1,\ldots,p_d)}(t)(x,dy) = i^k \xi_1^{p_1}(y)\cdots\xi_d^{p_d}(y)\, e^{i\langle t,\xi(y)\rangle}\, Q(x,dy), \tag{4.25}$$

c'est-à-dire que pour tous $t \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ et $x \in E$, on a :

$$\Big(\frac{\partial^k Q(t)}{\partial t_1^{p_1}\cdots\partial t_d^{p_d}} f\Big)(x) = i^k \int_E \xi_1^{p_1}(y)\cdots\xi_d^{p_d}(y)\, e^{i\langle t,\xi(y)\rangle} f(y) Q(x,dy). \tag{4.26}$$

4.3.1 Etude de la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$.

Pour établir la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$, les points-clés de la méthode spectrale usuelle sont les propositions 3.7-3.8.

Proposition 4.7. *Si l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$ est satisfaite, alors pour toute probabilité initiale μ sur E telle que $\mu \in \mathcal{B}'$ et pour tout $f \in \mathcal{B}$ positive, les fonctions (de type) caractéristiques $\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$, $n \geq 1$, vérifient la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$ avec $L(0) = \pi(f)$.*

Démonstration. Rappelons (cf. (4.1) et (4.2)) que, d'après $\mathcal{U}_d(m)(i)$, il existe $\hat{\kappa} \in [0,1[$, $C > 0$ et $\pi \in \mathcal{B}'$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{B},\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\, \|Q^n f - \pi(f)1_E\| \leq C\hat{\kappa}^n \|f\|.$$

En particulier, si $f \geq 0$, la suite positive $(\mathbb{E}[f(X_n)])_n$ est majorée car elle est convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_\mu[f(X_n)] = \lim_{n\to+\infty} \mu(Q^n f) = \mu(\pi(f)1_E) = \pi(f).$$

Soit $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert borné quelconque de 0 dans $\mathbb{R}^d$. L'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)(ii)$ nous permet d'appliquer d'abord la proposition 3.7 aux opérateurs de Fourier $Q(t)$, à savoir : pour tout $\kappa \in]\hat{\kappa}, 1[$, il existe $R_\kappa > 0$ tel que, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, Q(t)^n = \lambda(t)^n \Pi(t) + N(t)^n, n \in \mathbb{N}^*,$$

$\Pi(t)$, $N(t)$ et $\lambda(t)$ étant respectivement définis en (3.10), (3.11) et (3.13) avec $e = 1_E$. Le lemme 4.3 implique alors que, pour tout $t \in B(0, R_\kappa)$, on a :

$$\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, e^{i\langle t, S_n\rangle}\big] = \mu(Q(t)^n f) = \lambda(t)^n L(t) + R_n(t),$$

avec $L(t)$, $R_n(t)$ définis par :

$$L(t) := \mu(\Pi(t) f) \quad \text{et} \quad R_n(t) := \mu(N(t)^n f). \tag{4.27}$$

En outre, en utilisant (3.15) et les hypothèses $\mu \in \mathcal{B}'$, $f \in \mathcal{B}$, on obtient que la fonction $\mathcal{R}(\cdot)$ de la condition $\mathcal{R}_d(m)$(i) est ici donnée par :

$$\forall t \in \overline{B}(0, R_\kappa), \quad \mathcal{R}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(t) = \mu(\mathcal{N}(t) f),$$

avec $\mathcal{N}(t) = \sum_{n\geq 1} N(t)^n$ (cf. (3.16)). La proposition 3.7 nous donne aussi $\lambda(0) = 1$ et $\Pi(0) = \Pi := \pi(\cdot)1_E$. On a donc en particulier

$$L(0) = \mu(\Pi(0) f) = \mu(\Pi f) = \mu(\pi(f)1_E) = \pi(f).$$

Enfin la proposition 3.8 fournit la régularité souhaitée pour les fonctions $\lambda(\cdot)$, $L(\cdot)$ et $\mathcal{R}(\cdot)$. La condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$ est donc établie. □

Remarque 4.2. *Pour tous $t \in B(0, R_\kappa)$ et $\ell = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor$, on a $R_n^{(\ell)}(t) = \mu(N_n^{(\ell)}(t))$. D'après la proposition 3.8, on a donc en particulier*

$$\forall \ell = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor,\, \exists C_\ell > 0, \quad \sup_{n\geq 1} |R_n^{(\ell)}(0)| \leq \|\mu\| C_\ell.$$

Remarque 4.3. *La fonction $\lambda(\cdot)$ est indépendante de la probabilité initiale μ et de la fonction positive $f \in \mathcal{B}$: elle dépend en effet uniquement de $Q(\cdot)$ (cf. (3.13)). Par contre, les fonctions $L(\cdot)$, $R_n(\cdot)$ et $\mathcal{R}(\cdot)$ dépendent de μ et f.*

4.3.2 Etude de la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$.

L'étude de la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ nous conduit à introduire l'hypothèse supplémentaire suivante sur $Q(\cdot)$:

Hypothèse (NA). `[Hypothèse de non-arithméticité spectrale.]`
Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe $C_K > 0$ et $\rho_K \in [0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \forall t \in K,\, \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_{_K}\, \rho_{_K}^n \tag{4.28}$$

Enonçons une condition équivalente à l'hypothèse (NA) lorsque $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$.

Proposition 4.8. *Si $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, alors l'hypothèse (NA) est équivalente à*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ r(Q(t)) < 1. \tag{4.29}$$

Démonstration. Elle utilise le résultat du lemme suivant :

Lemme 4.4. *Si $T_k \to T$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, alors $r(T) \geq \overline{\lim}_k\, r(T_k)$.*

Démonstration. On sait (cf. Lemme 3.6 et Remarque 3.6) que $r(T) = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que $r(T) \leq \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq r(T) + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $\lim_k \|T_k^{n_0}\| = \|T^{n_0}\|$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, il existe $K \geq 1$ tel que

$$\forall k \geq K, \quad \|T_k^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} + \frac{\varepsilon}{2},$$

donc $\forall k \geq K$, $r(T_k) \leq \|T_k^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq r(T) + \varepsilon$. D'où $\overline{\lim}_k\, r(T_k) \leq r(T) + \varepsilon$. On en déduit l'inégalité cherchée car $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

Nous pouvons maintenant passer à la preuve de la proposition 4.8. Supposons (4.28) et considérons $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit $K = \{t\}$. Comme K est un compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la formule du rayon spectral nous donne $r(Q(t)) \leq \rho_K < 1$. D'où (4.29).
Supposons maintenant (4.29). Soit K un compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et soit

$$r_{_K} := \sup\{r(Q(t)),\ t \in K\}.$$

On a $r_{_K} \in [0,1]$. Si $r_K = 1$, alors il existe une suite $(\tau_k)_k$ de K tels que $\lim_k r(Q(\tau_k)) = 1$. Par compacité de K, il existe une sous-suite $(\tau_{\phi(k)})_k$ qui converge vers $\tau \in K$ et comme $\lim_k Q(\tau_{\phi(k)}) = Q(\tau)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, on a $r(Q(\tau)) \geq \overline{\lim}_k\, r(Q(\tau_k)) = 1$ par le lemme 4.4, ce qui est faux car $\tau \neq 0$ et $r(Q(\tau)) < 1$ par (4.29). Donc $r_{_K} < 1$.
Considérons alors $\rho_{_K} \in]r_{_K}, 1[$ et Γ le cercle complexe orienté $\{|z| = \rho_{_K}\}$. On a, pour tous $t \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (cf. Preuve de (3.25)) :

$$Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma z^n (zId - Q(t))^{-1} dz.$$

Comme $(z,t) \mapsto (zId - Q(t))^{-1}$ est continue sur le compact $\Gamma \times K$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{M}_{K,\Gamma} := \sup_{(t,z)\in K\times\Gamma} \|(zId - Q(t))^{-1}\| < +\infty.$$

L'expression intégrale de $Q(t)^n$ précédente implique alors (4.28) ; plus précisément on obtient : $\forall t \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|Q(t)^n\| \leq \mathcal{M}_{K,\Gamma}\, \rho_K^{n+1}$. $\square$

La propriété (4.29) peut être réduite à des conditions sur Q et ξ, voir la sous-section 4.3.3. Pour le moment nous gardons la forme générale de l'hypothèse (NA) qui est la plus simple pour faire le lien avec $\mathcal{R}_d(m)(ii)$.

Proposition 4.9. *On suppose que les hypothèses $\mathcal{U}_d(m)$ et (NA) sont satisfaites. Alors, pour toute probabilité initiale μ sur E telle que $\mu \in \mathcal{B}'$ et pour tout $f \in \mathcal{B}$ positive, les fonctions (de type) caractéristiques $\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$, $n \geq 1$, vérifient la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$.*

Démonstration. Puisque $\mu \in \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{B}$, la proposition 4.9 résulte alors du lemme 4.3 et des deux lemmes ci-dessous. $\square$

Soit $0 < r < r'$. Notons $K := \overline{K_{r,r'}} = \{t \in \mathbb{R}^d : r \leq \|t\| \leq r'\}$ l'adhérence de $K_{r,r'}$ dans $\mathbb{R}^d$. Rappelons que la condition (4.28) nous donne l'existence de $C > 0$ et $\rho \in [0, 1[$ tels que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in K$, $\|Q(t)^n\| \leq C\, \rho^n$. La série $\sum_{n\geq 1} Q(t)^n$ converge donc uniformément sur K.

Lemme 4.5. *Soient $\rho' \in]\rho, 1[$, $z \in \mathbb{C}$ et $\Gamma_{\rho'}$ est le cercle orienté de centre 0 et de rayon ρ'. On a :*

$$\forall t \in K, \quad \mathcal{Q}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_{\rho'}} \frac{z}{1-z} \big(zId - Q(t)\big)^{-1} dz. \tag{4.30}$$

Démonstration. Soient $t \in K$ et $|z| = \rho'$. La condition (4.28) implique que $\big(zId - Q(t)\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)} Q(t)^n \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (cf. section 3.4). Une preuve analogue à celle de (3.25) montre alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_{\rho'}} z^n \big(zId - Q(t)\big)^{-1} dz$$

et la propriété (4.30) s'obtient comme dans la preuve de (3.16) en intégrant terme à terme sur $\Gamma_{\rho'}$ la somme de la série $\sum_{n\geq 1} z^n \big(zId - Q(t)\big)^{-1}$ de la variable z, uniformément convergente sur $\Gamma_{\rho'}$. $\square$

Remarque 4.4. *Comme $\mu \in \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{B}$, la série $\sum_{n\geq 1} \mu(Q(t)^n f)$ converge uniformément sur $K := \overline{K_{r,r'}}$ vers $\mu(\mathcal{Q}(t) f)$.*

Lemme 4.6. $\mathcal{Q}(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(K_{r,r'}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$.

Démonstration. Le lemme découle clairement du lemme précédent et de l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$ qui permet de dériver sous le signe "intégrale". $\square$

4.3.3 Réduction de l'hypothèse (NA)

Sous l'hypothèse $\mathcal{U}_d(0)$, on sait que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ et on a prouvé que l'hypothèse (NA) est équivalente à (4.29). L'introduction de l'hypothèse (RS) ci-dessous, portant sur le rayon spectral et le spectre périphérique de $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, permet de transformer (4.29) en une hypothèse de non-existence de valeurs propres de module 1 de $Q(t)$, $t \neq 0$.

Hypothèse (RS)**.**

(i) $\forall t \in \mathbb{R}^d$*,* $r(Q(t)) \leq 1$*,*

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $r(Q(t)) = 1$*, les valeurs spectrales de module 1 de* $Q(t)$ *sont des valeurs propres de* $Q(t)$*.*

Corollaire 4.1. *Si* $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ *et si l'hypothèse* (RS) *est vérifiée alors :*

$$(NA) \;\Leftrightarrow\; (4.29) \;\Leftrightarrow\; \forall t \neq 0,\ Q(t) \text{ n'a pas de valeur propre de module 1.}$$

Par conséquent, sous les hypothèses $\mathcal{U}_d(0)$ et (RS), la vérification de l'hypothèse (NA) revient à démontrer que, pour $t \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, l'équation de fonction propre $Q(t)w = \lambda\, w$ n'a pas de solution $w \in \mathcal{B}$, $w \neq 0$. Or, l'équation précédente s'écrit encore

$$\int_E e^{i\langle t,\xi(y)\rangle} w(y)\, Q(x,dy) = \lambda\, w(x),$$

pour tout $x \in E$ ou pour π-presque tout $x \in E$ selon la nature de l'espace $\mathcal{B}$. En outre, en utilisant l'hypothèse de forte ergodicité, on peut montrer que cette équation ne peut être satisfaite que si $|w|$ est constante π-presque sûrement, de sorte que l'équation ci-dessus peut être étudiée en utilisant le résultat classique :

$$\Big[\ \int_E \phi(y) Q(x,dy) = 1,\ |\phi| = 1\ \Big] \;\Rightarrow\; \phi = 1\ \ Q(x,dy) - p.s..$$

Enfin, grâce à la notion d'ensembles Q-absorbants, on peut préciser les arguments précédents et réduire la condition (4.29) en utilisant les définitions de non-arithméticité ou non-lattice suivantes :

Définition 4.4. *Rappelons que* $A \in \mathcal{E}$ *est* Q*-absorbant si pour tout* $a \in A$*,* $Q(a, A) = 1$*.*

- *On dit que* (Q, ξ) *(ou plus simplement* ξ*) est arithmétique relativement à* $\mathcal{B}$ *s'il existe un d-uplet* $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$*, un nombre complexe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $|\lambda| = 1$*, puis un sous-ensemble* $A \in \mathcal{E}$*,* Q*-absorbant, tel que* $\pi(A) = 1$*, et enfin une fonction bornée* $w \in \mathcal{B}$ *telle que* $|w|$ *soit constante non nulle sur* A*, de sorte que :*

$$\forall x \in A, \quad e^{i\langle t,\xi(y)\rangle} w(y) = \lambda w(x) \quad Q(x,dy) - p.s.. \tag{4.31}$$

- *On dit que* (Q, ξ) *(ou plus simplement* ξ*) est lattice s'il existe un d-uplet* $b \in \mathbb{R}^d$*, un sous-groupe fermé* H *de* $(\mathbb{R}^d, +)$*,* $H \neq \mathbb{R}^d$*, puis un sous-ensemble* $A \in \mathcal{E}$*,* Q*-absorbant, et enfin une fonction mesurable bornée* $\theta : E \to \mathbb{R}^d$*, de sorte que*

$$\forall x \in A, \quad \xi(y) + \theta(y) - \theta(x) \in b + H \quad Q(x,dy) - p.s.. \tag{4.32}$$

La proposition suivante est classique, voir par exemple [41, Prop. V.1-V.2] et [48, § 5 et 12].

Proposition 4.10. `[Réduction de l'hypothèse (NA).]` *On suppose que les hypothèses* $\mathcal{U}_d(0)$ *et (RS) sont satisfaites, et on suppose en outre que, si* $Q(t)f = \lambda f$*, avec* $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$*,* $f \in \mathcal{B}$*, et* $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $|\lambda| = 1$*, alors* $|f| \leq \pi(|f|)$*. On a alors les propriétés suivantes :*

(i) L'hypothèse (NA) est vérifiée si et seulement si ξ *est non-arithmétique relativement à* $\mathcal{B}$*.*

(ii) Si ξ *est non-lattice, alors* ξ *est non-arithmétique relativement à* $\mathcal{B}$*. La réciproque est vraie si l'espace* $\mathcal{B}$ *vérifie la propriété suivante : pour toute fonction* $\psi : E \to \mathbb{R}$ *mesurable, la fonction* $e^{i\psi}$ *(ou sa classe modulo* π*) appartient à* $\mathcal{B}$*.*

Nous donnons ci-dessous une preuve complète de la proposition 4.10 dans le cas des chaînes finis (i. e. l'espace d'états E est fini). Les arguments dans le cas général sont en fait similaires.

Remarquons que, dans le cas fini, sous la condition $\mathcal{U}_d(0)$, les deux autres hypothèses de la proposition 4.10 sont vérifiées. En effet, $\mathcal{B}$ est l'algèbre de Banach des fonctions de E dans $\mathbb{C}$, muni par exemple de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et les opérateurs de Fourier sont définis par (4.23). Comme $\mathcal{B}$ est de dimension finie, toute valeur spectrale de $Q(t)$ est une valeur propre de $Q(t)$. En outre, d'après (4.23), on a : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $r(Q(t)) \leq \|Q(t)\|_\infty \leq 1$. Par conséquent l'hypothèse (RS) est vérifiée. Enfin, si $f \in \mathcal{B}$ est tel que $Q(t)f = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, alors on déduit de (4.23) que $|f| \leq Q|f|$, puis par une récurrence immédiate que : $\forall n \geq 1,\ |f| \leq Q^n|f|$. Or, d'après l'hypothèse de forte ergodicité, on sait que $\lim_n Q^n|f| = \pi(|f|)$, donc $|f| \leq \pi(|f|)$. Dans le cas fini, les conditions non-arithmétique et non-lattice sont équivalentes (voir la preuve ci-dessous).

Démonstration de la proposition 4.10 dans le cas des chaînes finies.
Démontrons tout d'abord que, si la condition (4.29) n'est pas satisfaite, alors ξ est arithmétique et lattice. Soit $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $r(Q(t)) \geq 1$. Alors on a $r(Q(t)) = 1$, et $Q(t)$ admet une valeur propre complexe λ de module 1. Soit $f \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ une fonction propre associée à λ. Alors $|f| \leq \pi(|f|)$. D'où $f_0 := \pi(|f|) - |f| \geq 0$ et comme $\pi(f_0) = 0$, on obtient $|f| = \pi(|f|)$ π-p.s.. En particulier on a $\|f\|_\infty = \pi(|f|)$, et sans perte de généralité on peut supposer que $\|f\|_\infty = 1$. Définissons

$$A = \{k \in E,\ |f(k)| = 1\}.$$

Soit $k \in A$. De (4.23) on déduit que

$$1 = |f(k)| = |\sum_{\ell \in E} q(k,l) e^{i\langle t, \xi(\ell)\rangle} f(l)| \leq \sum_{\ell \in E} q(k,l)|f(\ell)| \leq |f(k)| = 1,$$

d'où l'implication suivante : $q(k,\ell) > 0 \Rightarrow \ell \in A$, ou encore : $\ell \notin A \Rightarrow q(k,\ell) = 0$. On en déduit que $\forall k \in A,\ q(k, A^c) = 0$, ce qui démontre que A est Q-absorbant. Notons que ce qui précède montre aussi que $\pi(A) = 1$. Soit maintenant $g : A \to \mathbb{R}$ telle, pour tout $\ell \in A$, $f(\ell) = e^{ig(\ell)}$, et soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{i\beta}$. La relation $Q(t)f = \lambda f$ et le fait que A soit Q-absorbant donnent alors pour tout $k \in A$

$$\sum_{\ell \in A} q(k,\ell)\big(1 - e^{i\langle t, \xi(\ell)\rangle + g(\ell) - g(k) - \beta}\big) = 0,$$

donc $\sum_{\ell \in A} q(k,\ell)\big(1 - \cos(\langle t, \xi(\ell)\rangle + g(\ell) - g(k) - \beta)\big) = 0$. D'où :

$$\forall k \in A,\ \langle t, \xi(\cdot)\rangle + g(\cdot) - g(k) - \beta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad Q(k,\cdot) - \text{p.s.}. \tag{4.33}$$

On en déduit en particulier qu'on a (4.31) avec $w = e^{ig}$, de sorte que ξ est arithmétique. Pour établir que ξ est lattice, posons $\theta(\ell) = g(\ell)\frac{t}{\|t\|^2}$, $\ell \in A$, puis $b = \beta\frac{t}{\|t\|^2}$, et enfin définissons $H = (2\pi\mathbb{Z})\frac{t}{\|t\|^2} \oplus (\mathbb{R}\,t)^\perp$. Alors H est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^d$, $H \neq \mathbb{R}^d$, et ξ est lattice car la propriété (4.33) s'écrit encore :

$$\forall k \in A, \quad \xi(\cdot) + \theta(\cdot) - \theta(k) - b \in H \quad Q(k, \cdot) - \text{p.s.}.$$

Réciproquement, démontrons que, si ξ est lattice, alors ξ est arithmétique, et la condition (4.29) n'est pas satisfaite. Supposons que ξ soit lattice. Avec les notations de (4.32), on a alors pour $t \in H^\perp \setminus \{0\}$

$$\forall k \in A, \left\langle t, \xi(\cdot) + \theta(\cdot) - \theta(k) - b \right\rangle = 0 \quad Q(k, \cdot) - \text{p.s.}.$$

En posant $\lambda = e^{i\langle t,b\rangle}$ et $w(\cdot) = e^{i\langle t,\theta(\cdot)\rangle}$, on obtient (4.31), donc ξ est arithmétique. De plus, en utilisant (4.23) et le fait que l'ensemble A dans (4.32) est Q-absorbant, il vient

$$\forall k \in A, \ (Q(t)w)(k) = \sum_{\ell \in A} q(k, l)e^{i\langle t,\xi(l)\rangle}w(\ell) = \lambda w(k),$$

puis en itérant, on obtient que $Q(t)^n w$ et $\lambda^n w$ coïncident sur A pour tout $n \geq 1$. Cette dernière propriété implique que $r(Q(t)) = 1$, donc que (4.29) n'est pas vérifiée. En effet, comme $r(Q(t)) \leq 1$, si on avait $r(Q(t)) \neq 1$, alors on aurait $r(Q(t)) < 1$, donc $\lim_n Q(t)^n w = 0$, ce qui est impossible car on a $\forall k \in A, \ |(Q(t)^n w)(k)| = |w(k)| = 1$. □

Nous terminons cette sous-section par l'étude du cas particulier d'une chaîne finie de matrice de transition Q à coefficients strictement positifs. Rappelons que l'opérateur Q est alors fortement ergodique (cf. Proposition 3.4).

Proposition 4.11. *Si Q est une matrice de transition à coefficients strictement positifs, alors $r(Q(t)) = 1$ si et seulement si la fonction $e^{i\langle t,\xi(\cdot)\rangle}$ est constante sur E.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^d$ tel que $r(Q(t)) = 1$. Soient λ une valeur propre complexe de module 1 de $Q(t)$ et $f \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ telle que $Q(t)f = \lambda f$. Alors $|f|$ est constante sur E : en effet, si $k \in E$ est tel que $|f(k)| = \|f\|_\infty$, alors en écrivant $|f(k)| = |(Q(t)f)(k)|$, on déduit aisément de (4.23) et de la stricte positivité des coefficients de Q que $|f(l)| = |f(k)| = \|f\|_\infty$. Soit $p \in E$ quelconque. L'égalité $\lambda f(p) = \sum_{l \in E} q(p, l)e^{i\langle t,\xi(l)\rangle}f(l)$ (cf. 4.23) nous donne :

$$|\lambda - q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}||f(p)| \leq \sum_{l \neq p} |q(p, l)||f(l)|$$

ou encore, $|f|$ étant constante sur E :

$$|\lambda - q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}| \leq 1 - |q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}|$$

Cette inégalité est en fait une égalité car

$$1 - |q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}| = |\lambda| - |q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}| \leq |\lambda - q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}|.$$

Le développement de l'égalité $|\lambda - q(p, p)e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}|^2 = (1 - q(p, p))^2$ donne $Re\,(\lambda e^{-i\langle t,\xi(p)\rangle}) = 1$, c'est-à-dire $\lambda = e^{i\langle t,\xi(p)\rangle}$. Donc la fonction $e^{i\langle t,\xi(\cdot)\rangle}$ est constante et égale à λ. Réciproquement, soient $t \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, de module 1 tels que $\forall k \in E$, $e^{i\langle t,\xi(k)\rangle} = \lambda$. Comme $Q(t) = \lambda Q$, on a $Q(t)1_E = \lambda 1_E$, donc $r(Q(t)) = 1$. □

4.4 Théorèmes de renouvellement (énoncés généraux).

Les résultats du chapitre 2 et de la section 4.3 permettent d'énoncer des théorèmes de renouvellement pour des fonctionnelles additives associées à une chaîne de Markov fortement ergodique. C'est l'objet de cette section, où l'on retrouve les résultats de [34, 4] (voir aussi [14, 41]). Dans cette section, on conserve les données et notations précédentes, à savoir :

$(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x, dy)$, de probabilité Q-invariante π, et enfin de loi initiale μ. On considère une fonction $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ de E dans $\mathbb{R}^d$, de coordonnées π-intégrables sur E, et la fonctionnelle additive associée $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k)$. Enfin on dit que ξ est π-centrée (ou simplement centrée) si $\pi(\xi_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, d$. On dit que ξ est non-centrée dans le cas contraire.

4.4.1 Moyenne et variance asymptotique associé à $(S_n)_n$

Nous allons ici appliquer la proposition 2.1 du chapitre 2. D'après la proposition 4.7, sous l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$, l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$ du chapitre 2 est satisfaite pour toute probabilité initiale μ telle que $\mu \in \mathcal{B}'$ et pour tout $f \in \mathcal{B}$ positive.

En particulier, puisque $f = 1_E \in \mathcal{B}$, on a

$$\mathbb{E}_\mu\big[e^{i\langle t, S_n\rangle}\big] = \lambda(t)^n L(t) + R_n(t), \tag{4.34}$$

où $\lambda(\cdot)$, $L(\cdot)$ et $R_n(t)$ sont des fonctions de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0,R), \mathbb{C}\big)$ (pour un certain réel $R > 0$). Rappelons que $\lambda(0) = 1$, et que $\lambda(t)$ est la valeur propre dominante de $Q(t)$ (donc $\lambda(t)$ ne dépend pas de μ, contrairement à $L(t)$ et $R_n(t)$). Il n'est pas nécessaire ici de rappeler les définitions précises des fonctions $L(\cdot)$ et $R_n(\cdot)$ associées à $f = 1_E$ et μ (obtenues dans la preuve de la proposition 4.7). Observons uniquement que $L(0) = \pi(1_E) = 1$, et que nous avons $\sup_{n\geq 1} |R_n^{(\ell)}(0)| < +\infty$ pour $\ell = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor$ (cf. Remarque 4.2).

Explicitons tout d'abord le vecteur moyen $\vec{m}$ associé à la fonctionnelle additive $(S_n)_n$:

Proposition 4.12. *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{U}_d(1)$ soit vérifiée. Alors, pour toute probabilité initiale μ vérifiant $\mu \in \mathcal{B}'$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|] < +\infty$, on a :*

$$\vec{m} := -i(\nabla\lambda)(0) = \lim_n \frac{1}{n}\, \mathbb{E}_\mu[S_n] = \pi(\xi) = (\pi(\xi_1) \ldots \pi(\xi_d)).$$

Démonstration. La proposition 2.1 du chapitre 2 donne la première égalité. En considérant le cas particulier $\mu = \pi$, ce qui est possible puisque $\pi \in \mathcal{B}'$, et en utilisant le fait que

$$\mathbb{E}_\pi[S_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\pi[\xi(X_k)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\pi[(Q^k\xi)(X_0)] = \sum_{k=1}^n \pi(Q^k\xi) = n\pi(\xi),$$

on déduit la seconde égalité. □

Le résultat suivant fournit la matrice de covariance asymptotique dans le cas centré.

Proposition 4.13. `[Matrice de covariance asymptotique` Σ `dans le cas centré.]` *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{U}_d(2)$ soit satisfaite, et que ξ soit π-centrée, i.e. $\vec{m} = \pi(\xi) = 0$. Alors, pour toute probabilité initiale μ vérifiant $\mu \in \mathcal{B}'$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2] < +\infty$, on a :*

$$\Sigma := -(Hess\,\lambda)(0) = \lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_\mu[S_n^* S_n]. \tag{4.35}$$

Cette limite est indépendante de μ, et Σ est une matrice symétrique positive.

Démonstration. Notons que, d'après la proposition 4.12, $(\nabla\lambda)(0) = 0$ car $\pi(\xi) = 0$. La proposition 2.1 du chapitre 2 donne donc le résultat souhaité. □

Dans le cas décentré $\vec{m} := \pi(\xi) \neq 0$, la matrice symétrique $\Sigma := -(Hess\,\lambda)(0)$ est définie sous l'hypothèse $\mathcal{U}_d(2)$, mais l'assertion (ii) de la proposition 2.1 du chapitre 2 ne s'applique pas puisque $(\nabla\lambda)(0) \neq 0$. Par recentrage, nous allons cependant pouvoir écrire une formule analogue à celle de la proposition 4.13.

Proposition 4.14. `[Matrice de covariance asymptotique` Σ `dans le cas décentré.]` *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{U}_d(2)$ soit satisfaite, et que ξ soit décentrée, i.e. $\vec{m} = \pi(\xi) \neq 0$. Alors, pour toute probabilité initiale μ vérifiant $\mu \in \mathcal{B}'$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2] < +\infty$, on a :*

$$\Sigma \;:=\; -(Hess\,\lambda)(0) \;=\; \vec{m}^* \cdot \vec{m} + \lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_\mu\big[(S_n - n\,\vec{m})^*(S_n - n\,\vec{m})\big], \tag{4.36}$$

où $\vec{m}$ est identifié ci-dessus à la matrice ligne $(\pi(\xi_1)\ldots\pi(\xi_d))$. La limite précédente est indépendante de μ, et Σ est une matrice symétrique positive.

Démonstration. Posons $\xi_c := \xi - \vec{m}$ et $S_{n,c} := \sum_{k=1}^n \xi_c(X_k) = S_n - n\vec{m}$. Notons $\lambda_c(\cdot)$ la fonction de la formule (4.34) relative à $S_{n,c}$. Autrement dit, $\lambda_c(t)$ est la valeur propre dominante de l'opérateur de Fourier $Q_{\xi_c}(t)$ associé à ξ_c. D'après la proposition 4.12 (appliqués avec ξ_c), on a $(\nabla\lambda_c)(0) = 0$, et d'après la proposition 4.13, on a :

$$\Sigma_c := -(Hess\,\lambda_c)(0) = \lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_\mu[S_{n,c}^* S_{n,c}].$$

Maintenant le nombre $\lambda(t)$ dans la formule (4.34), relative cette fois à S_n, est la valeur propre dominante de l'opérateur de Fourier $Q_\xi(t)$ associé à ξ. Comme on a $Q_\xi(t) = e^{i\langle t,\vec{m}\rangle}Q_{\xi_c}(t)$, il vient que $\lambda(t) = e^{i\langle t,\vec{m}\rangle}\lambda_c(t)$, d'où pour tout $(j,l) \in \{1,\ldots,d\}^2$:

$$(\partial^2_{jl}\lambda)(0) = -m_k m_l + (\partial^2_{jl}\lambda_c)(0).$$

On en déduit que $-(Hess\,\lambda)(0) = \vec{m}^* \cdot \vec{m} - (Hess\,\lambda_c)(0)$, ce qui fournit le résultat souhaité. □

Remarque 4.5. `[A propos des conditions` $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|] < +\infty$ `et` $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2] < +\infty$`.]` *Supposons que Q opère sur $\mathcal{B}$. Si $\|\xi\| \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}'$, alors, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|] < +\infty$. En effet, comme $Q^k\|\xi\| \in \mathcal{B}$ pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\mu[\|\xi(X_k)\|] = \sum_{k=1}^n \mu(Q^k\|\xi\|) < +\infty.$$

De même, on peut montrer que, si $\|\xi\|^2 \in \mathcal{B}$, alors on a

$$\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2] \leq n \sum_{k=1}^{n} \mu(Q^k \|\xi\|^2) < +\infty.$$

Remarque 4.6. *Dans tous les exemples de la section 4.5, les conditions ξ non-arithmétique ou non-lattice impliquent que la matrice Σ des propositions 4.13-4.14 est automatiquement définie positive (cf. [48, § 5]).*

4.4.2 Théorèmes de renouvellement

Pour la commodité du lecteur, nous retranscrivons ci-dessous, dans notre cadre markovien, les conclusions (attendues) des théorèmes de renouvellement que nous allons déduire ici (cf. corollaire 4.2) du chapitre 2 et de la section 4.3. Les limites ci-dessous sont des limites au sens de la convergence vague de mesures de $\mathcal{M}_d$ (cf. définition 1.3). Sous réserve d'existence, on note pour μ, probabilité initiale donnée, pour $f : E \to [0, +\infty[$ fixée, et pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$:

$$U_f \ : \ B \mapsto U_f(B) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu[f(X_n)\, 1_B(S_n)].$$

Pour donner un sens aux potentiels $U_f(\cdot)$, nous devons supposer que $(S_n)_n$ est transiente, ce qui conduit, comme pour les suites de v.a.i.i.d., à considérer les trois cas ci-dessous. Pour l'étude des propriétés de récurrence-transience des marches aléatoires markoviennes, nous renvoyons à [3] pour le cas de la dimension $d = 1$, à [37] pour les chaînes transientes uniformément ergodiques, à [33] pour les chaînes fortement ergodiques, et à [52, 50] pour le cas des chaînes récurrentes au sens Harris.

Les conclusions (attendues) sont les suivantes (cf. corollaire 2.1 et les théorèmes 2.4 et 2.6 du chapitre 2) :

- Cas décentré unidimensionnel *$d = 1$ et $\pi(\xi) > 0$:*

$$\lim_{a\to-\infty} U_f(\cdot + a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty} U_f(\cdot + a) = \frac{\pi(f)}{\pi(\xi)}\, \mathcal{L}_1(\cdot) \tag{4.37}$$

- Cas centré multidimensionnel *$d \geq 3$ et $\vec{m} := \pi(\xi) = 0$:*

$$\lim_{\|a\|\to+\infty} \langle \Sigma^{-1} a, a\rangle^{\frac{d-2}{2}}\, U_f(\cdot + a) = C_d\, \pi(f)\, \mathcal{L}_d(\cdot) \tag{4.38}$$

avec la matrice de covariance (asymptotique) Σ donnée par la proposition 4.13, et avec la constante $C_d = 2^{-1}\, \pi^{-\frac{d}{2}}\, (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}}\, \Gamma\big(\frac{d-2}{2}\big)$, où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma d'Euler.

- Cas décentré multidimensionnel *$d \geq 2$ et $\vec{m} := \pi(\xi) \neq 0$:*
Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable telle que $\Lambda := \lim_{\tau\to+\infty} \frac{a(\tau)-\tau\vec{m}}{\sqrt{\tau}} \in \mathbb{R}^d$. Notant, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$R_\tau(A) := (2\pi\tau)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)\, 1_A(S_n - a(\tau))\big],$$

la conclusion (attendue) est

$$\lim_{\tau\to+\infty} R_\tau(\cdot) = C\,\mathcal{L}_d(\cdot) \tag{4.39}$$

avec la matrice de covariance (asymptotique) Σ donnée par la proposition 4.14, et avec la constante

$$C := C(\vec{m},\Sigma,\Lambda) := \pi(f)\,\frac{(\det\Sigma)^{-\frac12}}{\|\Sigma^{-\frac12}\vec{m}\|}\,\exp\left(-\frac{\|\Sigma^{-\frac12}\vec{m}\|^2\|\Sigma^{-\frac12}\Lambda\|^2-\langle\Sigma^{-\frac12}\vec{m},\Sigma^{-\frac12}\Lambda\rangle^2}{2\|\Sigma^{-\frac12}\vec{m}\|^2}\right).$$

Dans le corollaire ci-dessous, on considère $\varepsilon>0$ quelconque et :

- *si $d=1$, on pose $m_1=1$ et on suppose $\pi(\xi)>0$,*
- *si $d=2$, on pose $m_2=2$ et on suppose ξ non-centrée,*
- *si $d\geq 3$, on pose*
  - *$m_d=\max(d-2,2)$ si ξ est centrée,*
  - *$m_d=\max(\frac{d-1}{2},2)$ si ξ est non-centrée.*

Les hypothèses $\mathcal{U}_d(m_d+\varepsilon)$ (page 94) et de non-arithméticité spectrale (NA) (page 96), utilisées dans l'énoncé ci-dessous, portent sur l'action de Q et des opérateurs de Fourier $Q(t)$.

Corollaire 4.2. `[Théorèmes de renouvellement markoviens.]`
On suppose que les hypothèses $\mathcal{U}_d(m_d+\varepsilon)$ et (NA) sont satisfaites, puis que, pour tout $n\geq1$, $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|]<+\infty$. Lorsque $d\geq2$, on suppose en outre que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall n\geq1,\ \mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2]<+\infty$,

(ii) La matrice de covariance Σ est définie positive.

Alors, pour toute probabilité initiale μ telle que $\mu\in\mathcal{B}'$ et pour tout $f\in\mathcal{B}$, positive, telle que $\pi(f)\neq0$, on a (4.37) ou (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage).

Ce corollaire est une conséquence directe des résultats du chapitre 2 (cf. corollaire 2.1 et les théorèmes 2.4 et 2.6) et des propositions 4.7 et 4.9.

Le terme principal dans la preuve des théorèmes de renouvellement du chapitre 2 est lié à l'expression $\frac{\lambda(t)\,L(t)}{1-\lambda(t)}$. Le nombre complexe $L(t)$ (cf. (4.27)) dépend ici de la probabilité initiale μ et de la fonction f. Cependant, d'une part μ n'intervient pas dans la limite des conclusions (4.37) (4.38) (4.39), d'autre part f intervient uniquement par le terme $\pi(f)$. Ceci découle de la propriété $\lim_{t\to0}\mu(\Pi(t)f)=\mu(\Pi(f))=\pi(f)$.

Rappelons que l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA) peut être réduite, sous des conditions assez générales, à des hypothèses plus classiques de non-arithméticité ou non-lattice (cf. proposition 4.10). Le corollaire 4.2 sera étendu au cas lattice dans la section 4.6.

4.5 Applications.

Dans cette section, on applique le corollaire 4.2 aux exemples de chaînes de Markov fortement ergodiques de la section 4.1. On démontre en particulier que l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$ est particulièrement bien adaptée lorsque l'espace $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach et que les fonctions coordonnées ξ_i de ξ sont dans $\mathcal{B}$: c'est l'objet de la sous-section 4.5.1, et ce résultat est illustré par l'exemple 2 de la section 4.1. Par contre on verra dans la dernière sous-section que la condition $\mathcal{U}_d(m)(ii)$ conduit à des conditions assez restrictives sur ξ dans les exemples 4 et 5.

Commençons par traiter le cas simple des chaînes de Markov finies (cf. page 85).

Corollaire 4.3. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov finie, d'espace d'états E, telle que son opérateur de transition Q (cf. (4.3)) soit fortement ergodique sur l'algèbre de Banach $\mathcal{B}$ (de dimension finie) des fonctions de E dans $\mathbb{C}$. Soit $\xi : E \to \mathbb{R}^d$ non-lattice. Alors, pour toute probabilité initiale μ sur E et pour tout $f : E \to \mathbb{R}^+$ telle que $\pi(f) \neq 0$, on a (4.37) ou (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage).*

Démonstration. L'hypothèse $\mathcal{U}_d(\infty)$ est vérifiée car Q est supposé fortement ergodique sur $\mathcal{B}$, et $Q(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ (cf la sous-section 4.2.1). Enfin, comme ξ est non-lattice, l'hypothèse (NA) est vérifiée (cf. Prop. 4.10). $\square$

4.5.1 Cas des chaînes fortement ergodiques sur une algèbre de Banach.

Dans cette sous-section, $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)**.

Corollaire 4.4. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov telle que Q soit fortement ergodique sur $\mathcal{B}$. Soit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ une fonction de E dans $\mathbb{R}^d$ telle que :*

(i) Pour tout $\ell \in \{1, \ldots, d\}$, $\xi_\ell \in \mathcal{B}$,

(ii) La condition de non-arithméticité spectrale (NA) (page 96) est satisfaite,

(iii) Σ est définie positive.

Alors, pour toute probabilité initiale μ sur E telle que $\mu \in \mathcal{B}'$ et pour toute $f \in \mathcal{B}$, positive, telle que $\pi(f) \neq 0$, on a (4.37) ou (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage).

Démonstration. Comme $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2 \in \mathcal{B}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2] < +\infty$ et a fortiori $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|] < +\infty$ (cf. Remarque (4.5)). On peut donc considérer, pour $d \geq 2$, la matrice symétrique Σ comme indiqué dans la sous-section 4.4.2. Le corollaire découle du corollaire 4.2 et du lemme ci-dessous. $\square$

Lemme 4.7. *On a $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $(p_1, \cdots, p_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $p_1 + \cdots + p_d = k$, et enfin pour tout $f \in \mathcal{B}$:*

$$\left(\frac{\partial^k Q(t)}{\partial t_1^{p_1} \cdots \partial t_d^{p_d}}\right) f = Q(i^k \xi_1^{p_1} \ldots \xi_d^{p_d} e^{i\langle t, \xi \rangle} f).$$

Démonstration. Soient $t \in \mathbb{R}^d$ et $f \in \mathcal{B}$. Par hypothèse, on sait que $\langle t, \xi \rangle \in \mathcal{B}$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \|i^n \frac{\langle t,\xi \rangle^n}{n!} f\|$ converge, car on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|i^n \frac{\langle t, \xi \rangle^n}{n!} f\| \leq \frac{\|\langle t, \xi \rangle\|^n}{n!} \|f\|.$$

Par conséquent $e^{i\langle t,\xi \rangle}f$ est dans $\mathcal{B}$, comme somme de la série convergente $\sum_{n\geq 0} i^n \frac{\langle t,\xi \rangle^n}{n!} f$ de l'espace de Banach $\mathcal{B}$, et on a

$$Q(t)f = Q(\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\langle t,\xi \rangle^n}{n!} f) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n Q(\frac{\langle t,\xi \rangle^n}{n!} f)$$

car $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application u_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, par : $u_n(t) = i^n Q(\frac{\langle t,\xi \rangle^n}{n!} f)$. Soit $\ell \in \{1,\ldots,d\}$. On a $\frac{\partial u_0}{\partial t_\ell}(t) = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t_\ell}(t) = i^n Q\big(\xi_\ell \frac{\langle t,\xi \rangle^{n-1}}{(n-1)!} f\big).$$

On vérifie facilement que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\partial u_n}{\partial t_\ell}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, on déduit que $Q(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, avec pour tout $\ell \in \{1,\ldots,d\}$ et $t \in \mathbb{R}^d$

$$(\frac{\partial Q}{\partial t_\ell})(t)(f) = \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} Q(\frac{\langle t,\xi \rangle^{n-1}}{(n-1)!} i\xi_\ell f) = Q(t)(i\xi_\ell f).$$

Un raisonnement par récurrence permet d'obtenir la conclusion de cette proposition. □

4.5.2 Application à l'exemple 2.

On considère ici l'exemple 2 (page 85) : $(X_n)_{n\geq 0}$ est la chaîne de Markov d'espace d'états $E = [0,1]$, définie par la donnée d'une v.a. X_0 à valeurs dans $[0,1]$, puis par $X_n = \frac{1}{2}\big(X_{n-1} + \theta_n\big)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, où $(\theta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. indépendante de X_0, avec θ_n de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Ici $\mathcal{B} = Lip(E)$ est l'algèbre de Banach complexe des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{C}$. Posons

$$\mathcal{F} := \big\{v \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \forall x \in [0,1],\ v(\frac{x+1}{2}) = v(\frac{x}{2})\big\}.$$

Pour illustrer le corollaire 4.4, plaçons nous en dimension $d = 1$. Soit $\xi \in Lip(E)$ telle que $\int_0^1 \xi(x)dx > 0$.

Corollaire 4.5. *On suppose que ξ vérifie la condition suivante : il n'existe pas de couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, ni de fonction $\phi \in \mathcal{F} \cap Lip(E)$ tels que :*

$$\forall x \in [0,1],\ \xi(x) = ax + b + \phi(x) - \phi(\frac{x}{2}).$$

Alors, pour toute probabilité initiale μ sur $[0,1]$ et toute fonction $f \in Lip(E)$, $f \geq 0$, $f \neq 0$, et enfin pour tout $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{a\to-\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu[f(X_n)\, g(S_n - a)] = 0,$$

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu[f(X_n)\, g(S_n - a)] = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{\int_0^1 \xi(x)dx} \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Exemple d'application. Considérons $\xi \in Lip(E)$ définie par : $\xi(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Montrons en raisonnant par l'absurde qu'il n'existe pas de couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, ni de fonction $\phi \in \mathcal{F} \cap Lip(E)$ tels que $\forall x \in [0,1]$, $\xi(x) = ax + b + \phi(x) - \phi(\frac{x}{2})$. Supposons donc l'existence d'un réel $a \in \mathbb{R}$ (b étant nécessairement nul) et d'une fonction $\phi \in \mathcal{F}$ tels que

$$\forall x \in [0,1],\ x^2 = ax + \phi(x) - \phi(\frac{x}{2}).$$

Comme ϕ est continue en 0, on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x}{2^n})^2 = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{2^n} + \phi(x) - \phi(0),$$

c'est-à-dire que $\phi(x) = \frac{4}{3}x^2 - 2ax + \phi(0)$, et on aboutit à une contradiction car une vérification élémentaire montre que $\phi \notin \mathcal{F}$.

Considérons enfin pour simplifier $f = 1_{[0,1]}$. Le corollaire 4.5 permet d'affirmer en particulier que, pour tous réels α et β tels que $\alpha < \beta$, et pour toute loi de probabilité μ sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{a \to -\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu \big[1_{[\alpha+a, \beta+a]}(\sum_{k=1}^{n} X_k^2)\big] = 0 \text{ et } \lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu \big[1_{[\alpha+a, \beta+a]}(\sum_{k=1}^{n} X_k^2)\big] = 3(\beta - \alpha).$$

Démonstration du corollaire 4.5. Rappelons (cf. prop. 4.2) que la probabilité de transition Q de $(X_n)_{n \geq 0}$, définie par

$$Qf(x) = \frac{1}{2}\big(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\big)$$

est fortement ergodique sur l'espace $(Lip(E), \|\cdot\|)$, qui est une algèbre de Banach. Par hypothèse on a $\xi \in Lip(E)$, et par ailleurs, si μ est une loi de probabilité quelconque sur $[0,1]$, alors on a $\mu \in \mathcal{B}'$ car, pour tout $f \in \mathcal{B}$, $|\mu(f)| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|$. Pour appliquer le corollaire 4.4, nous admettons provisoirement ici que la condition de non-arithméticité spectrale (NA) sur $Lip(E)$ est équivalente à la condition imposée sur ξ dans le corollaire 4.5. Cette équivalence résultera de l'étude détaillée (dans cet exemple) du spectre périphérique des opérateurs de Fourier $Q(t)$ en fonction de ξ. Cette étude est reportée à la sous-section 4.6.2. $\square$

4.5.3 Application aux exemples 4 et 5.

Dans cette sous-section, on souhaite appliquer le corollaire 4.2 dans le cadre des chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques (Exemple 4 page 88) et des chaînes ρ-mélangeantes (Exemple 5, page 91). Plus précisément, on démontre que, contrairement aux exemples des sous-sections précédentes, l'hypothèse de régularité $\mathcal{U}_d(m)(ii)$ induit ici des conditions de moment assez contraignantes. Ceci est dû au fait que les espaces $\mathcal{B}$ mis en jeu dans le cadre du ρ-mélange ou de l'ergodicité v-géométrique ne sont pas des algèbres de Banach et sont composés de fonctions non bornées.

• **Exemple 4.** [`Chaînes` v`-géométriquement ergodiques.`]

Soit v une fonction mesurable de E dans $[1,+\infty[$, et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov v-géométriquement ergodique, c'est-à-dire Q est fortement ergodique sur l'espace de Banach complexe $(\mathcal{B}_v, \|\cdot\|_v)$ constitué des fonctions mesurables $f : E \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_v := \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{v(x)} < +\infty$. En particulier, on a $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$, c'est-à-dire que $Qv \in \mathcal{B}_v$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de Fourier $f \mapsto Q(t)(f) := Q(e^{i\langle t,\xi\rangle} f)$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$. En effet, $f \mapsto e^{i\langle t,\xi\rangle} f$ est dans $\mathcal{B}_v$, et on sait que $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$.

Proposition 4.15. *Soit $m > 0$. Supposons que $Q(\|\xi\|^m v) \in \mathcal{B}_v$, i.e.*

$$\sup_{x\in E} \frac{1}{v(x)} \int_E \|\xi(y)\|^m v(y) Q(x,dy) < +\infty. \tag{4.40}$$

Alors, pour tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^d$, $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$ et les dérivées partielles de $Q(\cdot)$ sont données par (4.26).

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons, pour simplifier, $f \mapsto Q_k(f)$ l'un *quelconque* des opérateurs $f \mapsto Q(i^k \xi_1^{p_1} \ldots \xi_d^{p_d} e^{i\langle t,\xi\rangle} f)$, où $(p_1, \cdots, p_d) \in \mathbb{N}^d$ est tel que $p_1 + \cdots + p_d = k$. Admettons provisoirement le lemme suivant :

Lemme 4.8. *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soit $\delta \in]0,1[$. On a alors :*

(i) $Q(\|\xi\|^{k+\delta} v) \in \mathcal{B}_v \ \Rightarrow\ Q_k(\cdot) \in \mathcal{C}_b^\delta(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$,

(ii) $Q(\|\xi\|^{k+1+\delta} v) \in \mathcal{B}_v \ \Rightarrow\ Q_k(\cdot) \in \mathcal{C}_b^1(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$ *et* $Q_k'(\cdot) = Q_{k+1}(\cdot)$.

Supposons $m > 1$, m non entier (les autres cas se traitant de même) et posons $\tau = m - \lfloor m \rfloor$. Comme $\|\xi\|^{1+\tau} \leq 1 + \|\xi\|^m$ et $Qv \in \mathcal{B}_v$, on a $Q(\|\xi\|^{1+\tau} v) \in \mathcal{B}_v$. Donc, d'après (ii) avec $k = 0$ et $\delta = \tau$, on obtient $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^1(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$ avec $Q' = Q_1$. En utilisant $\lfloor m \rfloor - 1$ fois (ii) avec successivement $Q_1, \ldots, Q_{\lfloor m \rfloor - 1}$, on obtient que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{\lfloor m \rfloor - 1}(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$ et $Q^{(\lfloor m \rfloor)} = Q_{\lfloor m \rfloor}$. Finalement, en considérant (i) avec $k = \lfloor m \rfloor$ et $\delta = \tau$, on obtient que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$. $\square$

Preuve du lemme 4.8. Sans perte de généralité, on suppose $d = 1$ car l'extension au cas $d \geq 2$ pour (ii) est immédiate en utilisant des dérivées partielles. Considérons donc, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{B}_v$, $Q_k(t)f = Q(i^k \xi^k e^{it\xi} f)$.

Preuve de (i). Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{B}_v$. Comme, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu} - 1| \leq 2|u|^\delta$, on a :

$$|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f| \leq Q\big(|\xi|^k \, |e^{i(t-t_0)\xi} - 1| \, |f|\big) \leq 2|t - t_0|^\delta \, \|f\|_v Q(|\xi|^{k+\delta} v).$$

Soit $C_k \in \mathbb{R}^+$ tel que $Q(|\xi|^{k+\delta} v) \leq C_k v$. On a donc

$$\|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f\|_v \leq 2C_k |t - t_0|^\delta \|f\|_v.$$

En particulier, $Q_k \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$ et U étant relativement compact dans $\mathbb{R}$, Q_k est une application continue bornée de U dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$, uniformément δ-höldérienne sur U. D'où (i).

Preuve de (ii). Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{B}_v$. En remarquant que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|e^{iu} - 1 - iu| \leq 2|u|^{1+\delta},$$

on a :

$$\begin{aligned}|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f - (t-t_0)Q_{k+1}(t_0)f| &\leq Q\big(|\xi|^k\, |e^{i(t-t_0)\xi} - 1 - (t-t_0)\xi|\, |f|\big) \\ &\leq 2|t-t_0|^{1+\delta}\, Q(|\xi|^{k+1+\delta}v)\|f\|_v.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f - (t-t_0)Q_{k+1}(t_0)f\|_v \leq 2C_{k+1}|t-t_0|^{1+\delta}\|f\|_v.$$

Donc $Q_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$ et $Q_k' = Q_{k+1}$. Enfin, d'après (i), Q_k et $Q_k' = Q_{k+1}$ sont des applications (continues) bornées de U dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$. Donc $Q_k \in \mathcal{C}_b^1(U, \mathcal{L}(\mathcal{B}_v))$. D'où (ii). □

• **Exemple 5.** `[Chaînes de Markov` ρ`-mélangeantes.]`

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov ρ-mélangeante (cf. page 91), c'est-à-dire fortement ergodique sur l'espace usuel $\mathbb{L}^2(\pi)$, où π est la probabilité Q-invariante.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de Fourier $f \mapsto Q(t)(f) := Q(e^{i\langle t,\xi\rangle} f)$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi))$, par composition des applications $f \mapsto e^{i\langle t,\xi\rangle}f$ et Q.

Proposition 4.16. *Soit* $m > 0$. *Supposons* $\sup_{x\in E} Q(\|\xi\|^{2m})(x) < +\infty$ *i.e.*

$$\sup_{x\in E}\int_E \|\xi(y)\|^{2m} Q(x,dy) < +\infty. \tag{4.41}$$

Alors, pour tout ouvert borné U *de* $\mathbb{R}^d$, *on a* $Q(\cdot) \in C_b^m(U, \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi)))$, *les dérivées partielles de* $Q(t)$ *étant données par (4.26).*

Démonstration. La preuve proposée ci-dessous est très proche de la preuve de la proposition 4.15 précédente. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons à nouveau, pour simplifier, $Q_k(\cdot)$ l'un *quelconque* des opérateurs $Q(i^k\xi_1^{p_1}\ldots\xi_d^{p_d}e^{i\langle t,\xi\rangle}\cdot)$ où $(p_1,\cdots,p_d) \in \mathbb{N}^d$ est tel que $p_1+\cdots+p_d = k$. Admettons provisoirement le lemme suivant :

Lemme 4.9. *Soit* U *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$. *Soit* $\delta \in]0,1[$. *On a alors :*

(i) $\sup_{x\in E} Q(\|\xi\|^{2k+2\delta}) < +\infty \;\Rightarrow\; Q_k(\cdot) \in \mathcal{C}_b^\delta(U, \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi)))$

(ii) $\sup_{x\in E} Q(\|\xi\|^{2k+2+2\delta}) < +\infty \;\Rightarrow\; Q_k(\cdot) \in \mathcal{C}_b^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi)))$ *et* $Q_k'(\cdot) = Q_{k+1}(\cdot)$.

Supposons $m > 1$, m non entier (les autres cas se traitant de même) et posons $\tau = m - \lfloor m\rfloor$. Comme $\|\xi\|^{2+2\tau} \leq 1 + \|\xi\|^{2m}$, on a $\sup_{x\in E} Q(\|\xi\|^{2+2\tau}(x) < +\infty$. Donc, d'après (ii) avec $k=0$ et $\delta = \tau$, on déduit que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi)))$ avec $Q' = Q_1$. En utilisant $\lfloor m\rfloor - 1$ fois (ii) avec successivement $Q_1, \ldots, Q_{\lfloor m\rfloor -1}$, on obtient que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{\lfloor m\rfloor-1}(U, \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi)))$ et $Q^{(\lfloor m\rfloor)} = Q_{\lfloor m\rfloor}$. Finalement, en considérant (i) avec $k = \lfloor m\rfloor$ et $\delta = \tau$, on obtient que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(U, \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(\pi)))$. □

Preuve du lemme 4.9. Sans perte de généralité, on suppose à nouveau $d = 1$. Considérons donc, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{L}^2(\pi)$, $Q_k(t)f = Q(i^k\xi^k e^{it\xi}f)$.

Preuve de (i). Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in I\!L^2(\pi)$. Comme, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^{iu} - 1| \leq 2|u|^\delta$, on a :

$$|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f| \leq Q\big(|\xi|^k\, |e^{i(t-t_0)\xi} - 1|\, |f|\big) \leq 2|t - t_0|^\delta\, Q(|\xi|^{k+\delta}|f|).$$

Soit $C_{k,\delta} \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $Q(|\xi|^{2k+2\delta})(x) \leq C_{k,\delta}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc, pour tout $x \in E$:

$$|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f|^2(x) \leq 4C_{k,\delta}|t - t_0|^{2\delta} Q(|f|^2)(x).$$

et comme π est Q-invariante :

$$\|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f\|_{I\!L^2(\pi)} \leq 2\sqrt{C_{k,\delta}}\, |t - t_0|^\delta \|f\|_{I\!L^2(\pi)}$$

Donc

$$\|Q_k(t) - Q_k(t_0)\|_{\mathcal{L}(I\!L^2(\pi))} \leq 2\sqrt{C_{k,\delta}}\, |t - t_0|^\delta.$$

En particulier, $Q_k \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{L}(I\!L^2(\pi)))$ et U étant relativement compact dans $\mathbb{R}$, Q_k est une application continue bornée de U dans $\mathcal{L}(I\!L^2(\pi))$, uniformément δ-höldérienne sur U (et même sur $\mathbb{R}$). D'où (i).

Preuve de (ii). Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in I\!L^2(\pi)$. En remarquant que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|e^{iu} - 1 - iu| \leq 2|u|^{1+\delta},$$

on a :

$$\begin{aligned} |Q_k(t)f - Q_k(t_0)f - (t - t_0)Q_{k+1}(t_0)f| &\leq Q\big(|\xi|^k\, |e^{i(t-t_0)\xi} - 1 - (t - t_0)\xi|\, |f|\big) \\ &\leq 2|t - t_0|^{1+\delta}\, Q(|\xi|^{k+1+\delta} f) \end{aligned}$$

On a donc par Q-invariance de π et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Q_k(t) - Q_k(t_0) - (t - t_0)Q_{k+1}(t_0)\|_{\mathcal{L}(I\!L^2(\pi))} \leq 2\sqrt{C_{k+1}}|t - t_0|^{1+\delta}.$$

Donc on a $Q_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(I\!L^2(\pi)))$ et $Q'_k = Q_{k+1}$. Enfin, d'après (i), Q_k et $Q'_k = Q_{k+1}$ sont des applications (continues) bornées de U dans $\mathcal{L}(I\!L^2(\pi))$. On obtient donc $Q_k \in \mathcal{C}^1_b(U, \mathcal{L}(I\!L^2(\pi)))$. D'où (ii). □

4.6 Théorèmes de renouvellement dans le cas lattice

On complète les résultats du corollaire 4.2 en considérant dans cette section le cas lattice. Pour cela, on conserve le cadre probabiliste précédent, à savoir : $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x, dy)$, de probabilité Q-invariante π, et de loi initiale μ.

4.6.1 Énoncés généraux

On considère à nouveau $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ une fonction de E dans $\mathbb{R}^d$, de coordonnées π-intégrables sur E, mais on suppose ici que la fonction ξ est à valeurs dans un sous-groupe fermé $\mathbb{S}$ de $(\mathbb{R}^d, +)$. La fonctionnelle additive associée, encore définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k)$, est donc à valeurs dans $\mathbb{S}$.

Quitte à se placer dans $\mathbb{R}^{d'}$ avec $d' < d$, on suppose que $\mathbb{S}$ est de dimension d (i. e. le sous-espace engendré par $\mathbb{S}$ est $\mathbb{R}^d$). Comme le sous-groupe $\mathbb{S}$ est supposé fermé, il est de la forme

$$\mathbb{S} = A\big(\mathbb{Z} \cdot \vec{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot \vec{e}_p\big) \oplus H,$$

où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ est un système orthonormé, H est un s.e.v de dimension $d - p$, et A est une matrice réelle inversible d'ordre d. On rappelle aussi que

$$\mathbb{S}^* := \big\{t \in \mathbb{R}^d \ : \ \forall s \in \mathbb{S},\ \langle t, s\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\big\} = 2\pi\,(A^*)^{-1}\big(\mathbb{Z} \cdot \vec{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot \vec{e}_p\big).$$

Les noyaux de Fourier $Q(t)$ associés à Q et ξ sont définis comme précédemment (cf. (4.21)), et l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$ (page 94) va également jouer un rôle important dans le cas lattice. On désigne à nouveau par $\mathcal{B}$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)** (cf. page 84), on suppose que la loi initiale μ de X_0 définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}$, et enfin on considère une fonction positive fixée f dans $\mathcal{B}$.

Comme indiqué dans la section 2.5, la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$ est conservée dans le cas lattice, et d'après la proposition 4.7, elle est vérifiée avec $L(0) = \pi(f)$ sous l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$. En revanche, dans le cas lattice, la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ doit être remplacée par la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ de la section 2.5, dont on rappelle ici la formulation :

Condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$. *Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$ d'adhérence contenue dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^*$, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\big[f(X_n)\, e^{i\langle \cdot, S_n\rangle}\big]$ converge uniformément dans U vers une fonction de $\mathcal{C}_b^m\big(U, \mathbb{C}\big)$.*

Grâce à une extension évidente de la preuve de la proposition 4.9 (page 97), la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ sera satisfaite si l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)$ est vérifiée et si, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^*$, il existe des constantes $C_K > 0$ et $\rho_K \in [0, 1[$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in K,\ \ \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_K\, \rho_K^n. \tag{4.42}$$

Nous allons voir que, comme dans la sous-section 4.3.3 (qui correspond au cas $\mathbb{S} = \mathbb{R}^d$), la condition précédente est vérifiée sous certaines hypothèses de type non-arithmétique ou non-lattice, mais ici définies relativement au sous-groupe $\mathbb{S}$. À cet effet introduisons sous l'hypothèse $\mathcal{U}_d(0)$ le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^d$:

$$G = \big\{t \in \mathbb{R}^d : r(Q(t)) = 1\big\}.$$

On notera que $\mathbb{S}^* \subset G$ car $Q(0) = Q$, $r(Q) = 1$ et $Q(\cdot)$ est $\mathbb{S}^*$-périodique. En adaptant les arguments de [48, Sect. 12], on peut montrer que G est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^d$. En outre, une extension évidente de la proposition 4.8 permet de démontrer la propriété suivante :

Pour tout compact de K de $\mathbb{R}^d \setminus G$, il existe des constantes $C_K > 0$ et $\rho_K \in [0, 1[$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in K,\ \ \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_K\, \rho_K^n. \tag{4.43}$$

Par conséquent, comme $\mathbb{S}^* \subset G$, une condition nécessaire et suffisante pour que la condition (4.42) soit satisfaite pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^*$ est que $\mathbb{S}^* = G$.

De plus, sous les hypothèses $\mathcal{U}_d(0)$ et (RS) (cf page 98), la condition $r(Q(t)) = 1$ peut être réduite à une équation de fonction propre, ce qui conduit dans le cas lattice à introduire les définitions suivantes :

- *On dit que ξ est arithmétique dans $\mathbb{S}$ relativement à $\mathcal{B}$ s'il existe un vecteur $t \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$, un ensemble Q-absorbant $A \in \mathcal{E}$ tel que $\pi(A) = 1$, et enfin une fonction $w \in \mathcal{B}$ de module 1 sur A, tels que l'on ait la propriété suivante :*

$$\forall x \in A, \quad e^{i\langle t, \xi(y)\rangle}\, w(y) = \lambda\, w(x) \qquad Q(x, dy) - p.s.. \tag{4.44}$$

- *On dit que ξ est sous-lattice dans $\mathbb{S}$ s'il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$, un sous-groupe propre $\mathbb{S}_0$ de $\mathbb{S}$, puis un ensemble Q-absorbant $A \in \mathcal{E}$ tel que $\pi(A) = 1$, et enfin une fonction mesurable bornée $\theta : E \to \mathbb{R}^d$ tels que*

$$\forall x \in A, \; \xi(y) + \theta(y) - \theta(x) \in b + \mathbb{S}_0 \;\; Q(x, dy) - p.s..$$

Sous les hypothèses $\mathcal{U}_d(0)$ et (RS), en s'inspirant de la preuve de la proposition 4.10 (page 99), on peut démontrer que $\mathbb{S}^* = G$ si et seulement si ξ n'est pas arithmétique dans $\mathbb{S}$ relativement à $\mathcal{B}$.

Supposons en outre que G soit discret, c'est le cas par exemple si $(S_n)_n$ vérifie un théorème central limite, voir [48, Sect. 12]. On a alors la propriété suivante (voir la preuve de [48, Prop. 12.4]) :
Il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$, un ensemble Q-absorbant $A \in \mathcal{E}$ tel que $\pi(A) = 1$, et enfin une fonction mesurable bornée $\theta : E \to \mathbb{R}^d$ tels que

$$\forall x \in A, \; \xi(y) + \theta(y) - \theta(x) \in b + G^* \;\; Q(x, dy) - p.s..$$

Par conséquent, si ξ n'est pas sous-lattice dans $\mathbb{S}$, on a nécessairement $G^* = \mathbb{S}$, et donc $G = \mathbb{S}^*$ et ξ n'est pas arithmétique dans $\mathbb{S}$ relativement à $\mathcal{B}$.

Des remarques précédentes, on déduit le résultat suivant, voir également [49].

Proposition 4.17. *On suppose que la fonction ξ est à valeurs dans un sous-groupe fermé $\mathbb{S}$ (de dimension d) de $\mathbb{R}^d$, et que les hypothèses $\mathcal{U}_d(m)$ et (RS) sont satisfaites. Alors :*

(i) La condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ est vérifiée si et seulement si ξ n'est pas arithmétique dans $\mathbb{S}$ relativement à $\mathcal{B}$.

(ii) Supposons en outre que G soit discret. Si ξ n'est pas sous-lattice dans $\mathbb{S}$, alors la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ est satisfaite.

En appliquant les résultats de la section 2.5, on déduit alors les théorèmes de renouvellement ci-dessous dans le cas lattice. On rappelle que $m_{\mathbb{S}}(\cdot)$ est la mesure de Haar sur $\mathbb{S}$, et que $c_{\mathbb{S}}$ est la constante strictement positive liée à la formule sommatoire de Poisson.

Corollaire 4.6. `[Théorèmes de renouvellement markoviens. Cas lattice.]`
Supposons que ξ soit à valeurs dans un sous-groupe fermé $\mathbb{S}$ (de dimension d) de $\mathbb{R}^d$, que ξ ne soit pas arithmétique dans $\mathbb{S}$ relativement à $\mathcal{B}$, que les hypothèses $\mathcal{U}_d(m_d+\varepsilon)$ et (RS) soient satisfaites, et enfin que, pour tout $n \geq 1$, $I\!E_\mu[\|S_n\|] < +\infty$. Lorsque $d \geq 2$, on suppose en outre que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $I\!E_\mu[\|S_n\|^2] < +\infty$,

(ii) Σ *est définie positive.*

Alors, pour toute probabilité initiale μ telle que $\mu \in \mathcal{B}'$ et pour tout $f \in \mathcal{B}$, positive, telle que $\pi(f) \neq 0$, on a (4.37) ou (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage), mais avec la mesure $c_{\mathbb{S}}\, m_{\mathbb{S}}(\cdot)$ à la place de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}_d(\cdot)$ sur $\mathbb{R}^d$.

4.6.2 Étude dans le cas de l'exemple 2

On considère ici l'exemple 2 (cf pages 85 et 106). Dans la sous-section 4.5.2, nous avons admis que la condition sur ξ énoncée dans la proposition 4.5 est équivalente à la condition de non-arithméticité spectrale (NA), ce qui nous a permis de préciser les théorèmes de renouvellement pour l'exemple 2 dans le cas non-lattice. Dans cette sous-section, nous allons déduire cette équivalence d'une étude complète du spectre périphérique des noyaux de Fourier. En particulier, cette étude illustre, avec une preuve complète, certains résultats admis dans la sous-section précédente.

Dans l'exemple 2, $\mathcal{B} = Lip(E)$ est l'algèbre de Banach complexe des fonctions lipschitziennes de E dans $\mathbb{C}$. On considère ici une fonction réelle $\xi \in Lip(E)$. L'opérateur de Fourier associé $Q_\xi(t)$, noté aussi plus simplement $Q(t)$, est défini pour tout $f \in Lip(E)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\quad (Q(t)f)(x) = \frac{1}{2}\big(e^{it\xi(\frac{x}{2})} f(\frac{x}{2}) + e^{it\xi(\frac{x+1}{2})} f(\frac{x+1}{2})\big). \tag{4.45}$$

D'après le lemme 4.7, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q_\xi(t)$ est un endomorphisme continu de $Lip(E)$, et l'on a $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(Lip(E))$. Nous nous proposons dans cette sous-section de faire l'étude complète, en fonction de ξ, du sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}$:

$$G_\xi := \{t \in \mathbb{R},\ r(Q_\xi(t)) = 1\}.$$

Nous déterminons en outre, pour $t \in G_\xi$, les valeurs spectrales de module 1 de $Q_\xi(t)$. On pose, comme dans la proposition 4.5,

$$\mathcal{F} := \big\{v \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \forall x \in [0,1],\ v(\frac{x+1}{2}) = v(\frac{x}{2})\big\}.$$

Proposition 4.18. *Soit $\xi \in Lip(E)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) $G_\xi \neq \{0\}$ *si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi \in \mathcal{F} \cap Lip(E)$ tels que :*

$$\forall x \in [0,1],\ \xi(x) = ax + b + \phi(x) - \phi(\frac{x}{2}).$$

Dans ce cas, on a

$$G_\xi = \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z} \text{ si } a \neq 0 \quad \text{et} \quad G_\xi = \mathbb{R} \text{ si } a = 0.$$

(ii) Soit $t \in G_\xi$. Alors $Q_\xi(t)$ admet pour seule valeur spectrale de module 1 la valeur propre simple $e^{it\xi(0)}$ et

$$Ker(Q_\xi(t) - e^{it\xi(0)}Id) = \{c\, e^{its(\cdot)},\, c \in \mathbb{C}\}$$

avec $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty}(\xi(\frac{x}{2^k}) - \xi(0))$, $x \in [0,1]$.

Rappelons que la condition de non-arithméticité spectrale (NA) sur $Lip(E)$ est équivalente à $G_\xi = \{0\}$ (cf. prop. 4.8). Par conséquent l'assertion *(i)* de la proposition 4.18 démontre l'équivalence admise dans la preuve de la proposition 4.5.

La proposition 4.18 permet de préciser l'énoncé du corollaire 4.5 dans le cas lattice : si la condition du (i) de la proposition 4.18 est vérifiée avec $a \neq 0$, alors la première conclusion du corollaire 4.5 subsiste, et la seconde est vérifiée avec $a \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(ak)$ à la place de $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx$.

La preuve de la proposition 4.18 requiert certaines propriétés spectrales de $Q(t)$. Pour cela nous allons utiliser le résultat classique suivant.

Théorème 4.1. *Soient $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$ un espace vectoriel (semi-) normé tels que l'injection canonique $i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_0$ soit compacte. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $r(T) > 0$. Supposons qu'il existe $\delta \in]0, r(T)[$ et $R > 0$ tels que*

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \|Tf\| \leq \delta\|f\| + R\|f\|_0. \tag{4.46}$$

Soit $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = r(T)$. Alors λ est une valeur propre de T.

L'inégalité (4.46) est appelée inégalité de Doeblin-Fortet. Le théorème 4.1 est une conséquence classique du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, voir [51, 39]. Une preuve (directe) du théorème 4.1 est présentée dans l'annexe B.

Vérifions que $T = Q(t)$ satisfait les hypothèses du théorème 4.1 avec

$$(\mathcal{B}, \|\cdot\|) = (Lip(E), \|\cdot\|) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0) = (Lip(E), \|\cdot\|_\infty),$$

et avec $\delta = \frac{1}{2}$ dans l'inégalité (4.46). C'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 4.10. $\{f \in Lip(E), \|f\| \leq 1\})$ *est relativement compacte dans* $(Lip(E), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de $\{f \in Lip(E), \|f\| \leq 1\}$. La suite (f_n) est une suite uniformément équicontinue et bornée (pour la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$) : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in [0,1]^2$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $|f_n(x) - f_n(y)| \leq m(f_n)|x-y| \leq |x-y|$. Donc d'après le théorème d'Ascoli, il existe $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telles $\lim_n \|f - f_{\phi(n)}\|_\infty = 0$. Et $f \in \mathcal{B}$, par passage à la limite dans la dernière inégalité. □

Remarque 4.7. *Une preuve simple du lemme 4.10 n'utilisant pas le théorème d'Ascoli et donc le procédé diagonal, est possible. Soit (f_n) une suite de $\{f \in \mathcal{B}, \|f\| \leq 1\}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $x_k := \frac{k}{p}$, $k \in \{0, \dots, p\}$. Les $(p+1)$ suites $(f_n(x_k))_n$ étant des suites bornées de $\mathbb{C}$, il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, la suite $(f_{\phi(n)}(x_k))_n$ converge dans $\mathbb{C}$. Donc par le critère de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m, n \geq N$, $\forall k \in \{0, \dots, p\}$, $|f_{\phi(n)}(x_k) - f_{\phi(m)}(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons* *maintenant* $x \in [0,1]$ *quelconque et* $k(x) \in \{0,\dots,p\}$ *tel que* $|x - x_{k(x)}| \le \frac{1}{2p}$. *Alors, pour tous* $m,n \ge N$ *et pour tout* $x \in [0,1]$ *:*

$$|f_{\phi(n)}(x) - f_{\phi(m)}(x)| \le 2|x - x_{k(x)}| + |f_{\phi(n)}(x_{k(x)}) - f_{\phi(m)}(x_{k(x)})| \le \varepsilon$$

La suite $(f_{\phi(n)})_n$ *est donc une suite de Cauchy de l'espace de Banach* $\big(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Lemme 4.11. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) \in \mathcal{L}(Lip(E))$ *et il existe* $C(t) > 0$ *tel que pour tout* $f \in Lip(E)$

$$\|Q(t)f\| \le \frac{1}{2}\|f\| + C(t)\|f\|_\infty. \tag{4.47}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. L'opérateur de Fourier $Q(t)$ est ici défini par :

$$\forall f \in Lip(E),\ \forall x \in [0,1],\ \ (Q(t)f)(x) = \frac{1}{2}\big(e^{it\xi(\frac{x}{2})}f(\frac{x}{2}) + e^{it\xi(\frac{x+1}{2})}f(\frac{x+1}{2})\big).$$

Soit $f \in Lip(E)$. Comme, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$e^{it\xi(x)}f(x) - e^{it\xi(y)}f(y) = e^{it\xi(x)}(f(x) - f(y)) + f(y)(e^{it\xi(x)} - e^{it\xi(y)}),$$

on a $m(e^{it\xi}f) \le m(f) + |t|\|f\|_\infty m(\xi)$. Rappelons que $\forall g \in Lip(E)$, $m(Qg) \le \frac{1}{2}m(g)$ et que $\|Qg\|_\infty \le \|g\|_\infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|Q(t)f\| &= m(Q(e^{it\xi}f)) + \|Q(e^{it\xi}f)\|_\infty \\ &\le \frac{1}{2}m(e^{it\xi}f) + \|e^{it\xi}f\|_\infty \\ &\le \frac{1}{2}m(f) + \big(1 + \frac{1}{2}|t|m(\xi)\big)\|f\|_\infty \\ &\le \frac{1}{2}\|f\| + C(t)\|f\|_\infty\end{aligned}$$

avec $C(t) := 1 + \frac{1}{2}|t|m(\xi)$. La linéarité de $Q(t)$ est évidente et ce qui précède prouve que $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ avec $\|Q(t)\| \le C(t)$. □

De ce qui précède, nous pouvons déduire la proposition suivante :

Proposition 4.19. *Soient* $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $r(Q(t)) > \frac{1}{2}$ *et* $\lambda \in \sigma(Q(t))$ *tel que* $|\lambda| = r(Q(t))$. *Alors* λ *est une valeur propre de* $Q(t)$. *En outre, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a* $r(Q(t)) \le 1$.

Démonstration. La première assertion est une conséquence directe du théorème 4.1 et des deux lemmes précédents. Supposons maintenant qu'il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $r(Q(t)) > 1$. Soit $\lambda \in \sigma(Q(t))$ tel que $|\lambda| = r(Q(t))$. D'après la première assertion, λ est une valeur propre de $Q(t)$. Soit $f \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$ telle que $Q(t)f = \lambda f$. L'inégalité $\|Q(t)f\|_\infty \le \|f\|_\infty$ conduit à $r(Q(t)) = |\lambda| \le 1$. Contradiction. □

D'après la proposition 4.19, la propriété $t \in G_\xi$ est équivalente à l'existence de valeur propre de module 1 pour $Q_\xi(t)$. Nous pouvons maintenir établir la proposition 4.18.

Démonstration de la proposition 4.18.

Preuve de (i). Supposons $G_\xi \neq \{0\}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $r(Q(t)) = 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = r(Q(t))$. D'après la proposition 4.19, λ est une valeur propre de $Q(t)$. Soit $f \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$ telle que $Q(t)f = \lambda f$. Alors $|f| \leq Q(|f|)$ et, Q étant positif, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f| \leq Q^n(|f|)$. De plus, comme Q est fortement ergodique (proposition 4.2), on a pour tout $x \in [0,1]$: $\lim_{n\to+\infty}(Q^n|f|)(x) = \nu(|f|)$, d'où

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq \nu(|f|).$$

Soit $x_0 \in [0,1]$ tel que $|f(x_0)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On a donc $\int_0^1 (|f(x_0)| - |f(x)|)\, dx = 0$ et comme $t \mapsto |f(x_0)| - |f(x)| \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$, on obtient finalement que

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| = \nu(|f|).$$

Donc $|f|$ est une fonction constante (non nulle) sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. L'égalité $\lambda f(x) = (Q(t)f)(x)$ i.e. $\lambda f(x) = \frac{1}{2}\big(e^{it\xi(\frac{x}{2})} f(\frac{x}{2}) + e^{it\xi(\frac{x+1}{2})} f(\frac{x+1}{2})\big)$ implique alors que

$$e^{it\xi(\frac{x}{2})} f(\frac{x}{2}) = e^{it\xi(\frac{x+1}{2})} f(\frac{x+1}{2})$$

car $e^{it\xi(\frac{x}{2})} f(\frac{x}{2})$ et $e^{it\xi(\frac{x+1}{2})} f(\frac{x+1}{2})$ sont deux nombres complexes non nuls de même module dont le module de la somme est égale à la somme des modules. Introduisons grâce au théorème du relèvement continu $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f = \|f\|_\infty e^{ig}$ et posons $u := t\xi + g$. Alors $\forall x \in [0,1]$, $u(\frac{x+1}{2}) - u(\frac{x}{2}) \in 2\pi\mathbb{Z}$ et, u étant continue sur $[0,1]$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $u(\frac{x+1}{2}) - u(\frac{x}{2}) = 2k\pi$. Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathcal{F}$ tels que

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) := t\xi(x) + g(x) = 4k\pi x + v(x).$$

Posons $\lambda = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda f(x) = e^{it\xi(\frac{x}{2})} f(\frac{x}{2}) = \|f\|_\infty e^{iu(\frac{x}{2})}$, il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $g(x) = u(\frac{x}{2}) + 2l\pi - \alpha$. D'où

$$\xi(x) = \frac{1}{t}(u(x) - g(x)) = \frac{1}{t}(u(x) - u(\frac{x}{2}) - 2l\pi + \alpha) = \frac{2k\pi}{t}x + \frac{\alpha - 2l\pi}{t} + \frac{1}{t}(v(x) - v(\frac{x}{2})). \quad (4.48)$$

Posons $\phi := \frac{1}{t}v$. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi \in \mathcal{F}$ tels que

$$\forall x \in [0,1],\ \xi(x) = ax + b + \phi(x) - \phi(\frac{x}{2}). \quad (4.49)$$

Admettons provisoirement que $g \in \mathcal{B}$ (cf. fin de la preuve de (ii)). Alors $u \in \mathcal{B}$, $v \in \mathcal{B}$ et donc $\phi \in \mathcal{B}$. Remarquons aussi que le couple (a,b) de l'égalité (4.49) est unique. Cela résulte du fait que si $\forall x \in [0,1]$, $cx = \psi(x) - \psi(\frac{x}{2})$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathcal{F}$, alors $c = 0$ et $\psi = 0$. En effet, ψ étant continue en 0, on obtient que $\forall x \in [0,1]$, $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{cx}{2^n} + \psi(0) = 2cx + \psi(0)$ et comme $\psi \in \mathcal{F}$, $c = 0$. Enfin, si $a \neq 0$, d'après (4.48) et l'unicité du réel a dans l'égalité (4.49), $t \in \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$. Donc si $a \neq 0$,

$$G_\xi \subset \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}. \quad (4.50)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ tels que

$$\forall x \in [0,1],\ \xi(x) = ax + b + \phi(x) - \phi(\frac{x}{2}).$$

Supposons $a \neq 0$. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. Posons $t = \frac{2k\pi}{a}$, $\alpha = bt$ et $v = t\phi$ de sorte que

$$\xi(x) = \frac{2k\pi}{t}x + \frac{\alpha}{t} + \frac{1}{t}(v(x) - v(\frac{x}{2})).$$

Soit $f(x) = e^{i(2k\pi x + v(\frac{x}{2}))}$, $x \in [0,1]$. Alors comme $v \in \mathcal{F}$, on a :

$$\begin{aligned}
(Q(t)f)(x) &= \frac{1}{2}\big(e^{it\xi(\frac{x}{2})}f(\frac{x}{2}) + e^{it\xi(\frac{x+1}{2})}f(\frac{x+1}{2})\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{i(k\pi x+\alpha+v(\frac{x}{2})-v(\frac{x}{4}))}e^{i(k\pi x+v(\frac{x}{4}))} + e^{i(k\pi(x+1)+\alpha+v(\frac{x+1}{2})-v(\frac{x+1}{4}))}e^{i(k\pi(x+1)+v(\frac{x+1}{4}))}\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{i(2k\pi x+\alpha+v(\frac{x}{2})} + e^{i(2k\pi x+\alpha+v(\frac{x+1}{2}))}\big) \\
&= e^{i\alpha}f(x).
\end{aligned}$$

Comme $e^{i\alpha}$ est une valeur propre de $Q(t)$, on a $r(Q(t)) \geq 1$ et $r(Q(t)) = 1$ d'après la proposition 4.19, c'est-à-dire $t \in G_\xi$. On vient donc de vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{2k\pi}{a} \in G_\xi$. D'où $G_\xi = \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$ d'après (4.50).

Le cas $a = 0$ et $b \neq 0$ se traite de la même manière : soit $t \in \mathbb{R}^*$ quelconque. Soient $\alpha := bt$ et $f_t(\cdot) = e^{it\phi(\frac{\cdot}{2})}$. On vérifie que $Q(t)f_t = e^{i\alpha}f_t$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $r(Q(t)) = 1$ et $G_\xi = \mathbb{R}$.

Enfin, si $a = b = 0$, i.e. s'il existe $\phi \in \mathcal{F}$ tels que $\forall x \in [0,1]$, $\xi(x) = \phi(x) - \phi(\frac{x}{2})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $r(Q(t)) = 1$: $1 \in \sigma(Q(t))$ car pour tous $t \in \mathbb{R}^*$ et $f_t(\cdot) = e^{it\phi(\frac{\cdot}{2})}$, $Q(t)f_t = f_t$. Donc $G_\xi = \mathbb{R}$.

Preuve de (ii). La propriété est immédiate si $t = 0$ car $Q(0) = Q$ et $Ker(Q - Id) = Vect(1_{[0,1]})$. Soit $t \in G_\xi \cap \mathbb{R}^*$. Soit λ une valeur spectrale de $Q(t)$ de module 1. On sait d'après la proposition 4.19 que λ est une valeur propre de $Q(t)$. Soit $f \in \mathcal{B}\setminus\{0\}$ telle que $Q(t)f = \lambda f$. Rappelons (cf. preuve de (i)) que f ne s'annule pas sur $[0,1]$ et que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \overline{\lambda}e^{it\xi(\frac{x}{2})}f(\frac{x}{2})$. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\tilde{\xi}(\cdot) = \xi(\cdot) - \xi(0)$. En itérant l'égalité précédente, on a

$$f(x) = (\overline{\lambda}e^{it\xi(0)})^n e^{it(\tilde{\xi}(\frac{x}{2}) + \cdots + \tilde{\xi}(\frac{x}{2^n}))} f(\frac{x}{2^n}).$$

Comme pour tout $x \in [0,1]$, $|\tilde{\xi}(x)| \leq m(\xi)|x|$, la série de terme général $\sum_{k\geq 1}\tilde{\xi}(\frac{x}{2^k})$ converge absolument. Posons alors $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\xi}(\frac{x}{2^k})$. L'égalité précédente montre que la suite de complexes de module 1 $((\overline{\lambda}e^{it\xi(0)})^n)_n$ converge vers $\frac{f(x)}{f(0)}e^{-its(x)}$. D'où $\lambda = e^{it\xi(0)}$ et $f(x) = f(0)e^{its(x)}$. Remarquons pour finir que $s \in \mathcal{B}$ et donc (cf. preuve de (i)) que $g \in \mathcal{B}$ car $g - ts$ est constante sur $[0,1]$. □

4.7 Conclusion (du chapitre 4)

Nous terminons ce chapitre par quelques remarques sur la condition de moment de type opérateur formulée dans l'hypothèse $\mathcal{U}_d(m)(ii)$ (page 94). Tout d'abord, remarquons que cette condition a une incidence en termes de condition de moment sur ξ. Pour le voir, considérons pour simplifier $d = 1$ et supposons par exemple que la condition $\mathcal{U}_1(2)(ii)$ soit satisfaite, avec $Q''(\cdot)$ donné par (4.25). En particulier $Q''(0)$ est associé au noyau $-\xi(y)^2\,Q(x,dy)$. Comme $1_E \in \mathcal{B}$, on a $Q''(0)1_E = -Q(\xi^2) \in \mathcal{B} \subset \mathbb{L}^1(\pi)$. D'où $\pi(\xi^2) < +\infty$.

Cependant, contrairement au cas indépendant, la condition $\pi(|\xi|^2) < +\infty$ n'implique pas en général la propriété $\mathcal{U}_1(2)(ii)$, et plus généralement la condition $\pi(\|\xi\|^m) < +\infty$ n'implique pas en général la propriété $\mathcal{U}_d(m)(ii)$.

Dans les applications aux exemples 4 et 5 qui concernent, d'une part les chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques (page 107), d'autre part les chaînes ρ-mélangeantes (page 109), on a vu que l'hypothèse de régularité $\mathcal{U}_d(m)(ii)$ est vérifiée sous les conditions de moment (4.40) et (4.41), à savoir respectivement :

$$(*) \qquad \sup_{x\in E} \frac{1}{v(x)} \int_E \|\xi(y)\|^m v(y) Q(x, dy) < +\infty$$

$$(**) \qquad \sup_{x\in E} \int_E \|\xi(y)\|^{2m} Q(x, dy) < +\infty.$$

Ces conditions, qui sont aussi celles qu'on déduirait des travaux [34, 14, 41, 4] (voir [28] pour $(*)$ et [73] pour $(**)$) sont naturelles en regard des preuves proposées dans ce chapitre. Cependant elles sont contraignantes en pratique et semblent difficiles à satisfaire avec des fonctions ξ non bornées. En particulier, si l'espace d'états E de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est non compact (typiquement $E = \mathbb{R}^q$), ces conditions ne sont pas adaptées à l'étude de la marche $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ car $\xi(x) = x$ est non bornée. En fait, dans l'exemple simple du modèle autorégressif de la sous-section 4.1.3, en considérant $\xi(x) = x$, $v(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, et en supposant $\mathbb{E}[\theta_1^2] < +\infty$, on peut même démontrer que la fonction $t \mapsto Q_\xi(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_v)$ n'est pas continue en 0, voir [48, Section 3].

Dans le chapitre suivant, on propose une méthode spectrale alternative, fondée sur l'utilisation de la forte ergodicité non plus sur un seul espace $\mathcal{B}$, mais sur toute une famille d'espaces. Cette approche permet d'affaiblir les conditions de moment ci-dessus. En particulier,

- Pour les chaînes v-géométriquement ergodiques, la condition $(*)$ sera remplacée par la suivante : $\|\xi\|^{m+\delta_0} \leq C\, v$ (cf. (5.37)),

- Pour les chaînes ρ-mélangeantes, la condition $(**)$ sera remplacée par : $\pi\big(\|\xi\|^{m+\delta_0}\big) < +\infty$ (cf. (5.40)).

Ces nouvelles conditions de moment possèdent, d'une part la forme attendue (dans chacun des deux modèles), d'autre part l'ordre optimal au réel δ_0 (arbitrairement petit) près.

Chapitre 5

Théorèmes de renouvellement markoviens obtenus par une méthode spectrale alternative.

Comme indiqué dans la conclusion du chapitre précédent, la condition $\lim_{t\to 0} \|Q(t)-Q\| = 0$, nécessaire pour appliquer la théorie standard de perturbation d'opérateurs, peut ne pas être remplie par l'opérateur de Fourier $Q(t) = Q_\xi(t)$ quand la fonction ξ n'est pas bornée. Dans ce chapitre, nous présentons le théorème de Keller et Liverani [53] (voir également [6, 60]), qui permet d'obtenir des résultats de perturbation d'opérateurs sous une hypothèse de continuité plus faible. En contrepartie, ce théorème requiert que la famille d'opérateurs vérifient des inégalités de Doeblin-Fortet. Ce théorème est rappelé et redémontré dans la section 5.1. La preuve que nous proposons est largement inspirée du travail de synthèse fait par D. Ferré dans [26] à partir des articles [53, 60]. Dans les sections 5.2 et 5.3, ce théorème est utilisé, d'une part pour établir un résultat de perturbation "faible" d'un opérateur fortement ergodique, et d'autre part pour réduire l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (qui s'exprime comme l'hypothèse (NA) du chapitre précédent).

Dans la section 5.4, on généralise la procédure de dérivation des résolvantes développée dans [48], en la précisant dans les deux directions suivantes, nécessaires pour la preuve des théorèmes de renouvellement : la procédure doit être appliquée sur $\mathbb{R}^d$, et non plus seulement au voisinage de $t = 0$, et l'ordre de régularité considéré peut être fractionnaire et plus nécessairement entier. Comme dans [48], la procédure de dérivation présentée ici met en jeu, non pas un seul espace de Banach $\mathcal{B}$, mais toute une famille d'espaces $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_m$ (croissante pour l'inclusion). La condition de moment fonctionnelle, imposée par l'hypothèse $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ du chapitre précédent, est alors remplacée en substance par une condition, également fonctionnelle, mais beaucoup plus faible en pratique. Pour l'expliquer brièvement (dans le cas $d = 1$), observons que la condition : $f \in \mathcal{B} \Rightarrow Q(\xi^m f) \in \mathcal{B}$ induite par l'hypothèse précédente (quand on dérive m fois l'opérateur de Fourier $Q(t)f = Q(e^{it\xi} f)$) est ici remplacée par la condition

$$f \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow Q(\xi^m f) \in \mathcal{B}_m,$$

qui est moins restrictive car $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_m$.

Les résultats de la section 5.4 peuvent être utilisés pour étudier l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2, à partir de laquelle il est possible d'obtenir les théorèmes de renouvellement. C'est l'objet de la section 5.5 . L'intérêt de ces énoncés théoriques, en comparaison avec les résultats du chapitre précédent, n'apparaît clairement qu'à la section 5.6 dans les applications aux chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques et aux chaînes de Markov ρ-mélangeantes. En effet, les propriétés de renouvellement (4.37) ou (4.38) ou (4.39), présentées page 103 selon la dimension et la condition de centrage, sont obtenues sous la condition $\|\xi\|^{m_d+\varepsilon} \leq cV$ pour le premier modèle et sous la condition de moment $\pi(\|\xi\|^{m_d+\varepsilon}) < +\infty$ pour le second, avec dans les deux cas la valeur m_d du cas indépendant. Dans la section 5.7, nous présentons un raffinement du théorème de renouvellement unidimensionnel, encore fondé sur le théorème de Keller et Liverani, mais qui n'utilise pas la procédure de dérivation. Ce résultat reprend, en le généralisant légèrement, celui présenté dans la note [31].

5.1 Un théorème de Keller-Liverani.

L'énoncé original du théorème de Keller et Liverani est démontré dans [53] (sous une hypothèse supplémentaire). Voir aussi [6] et [48, § 4]. L'article [60] donne une preuve résumée du théorème 5.1 (énoncé ci-dessous) dans un cas particulier. Les preuves présentées dans cette section adaptent légèrement celles proposées dans [26].

Nous utilisons dans cette section les définitions et notations usuelles de théorie spectrale (spectre, ensemble résolvant, application résolvante d'un opérateur), rappelées dans la section 3.4 (page 72).

5.1.1 Un premier énoncé.

Considérons un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ et un espace vectoriel (semi-) normé $(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_1})$. Supposons que $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_1$, c'est-à-dire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ et qu'il existe $\alpha > 0$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{B}$, on ait

$$\|f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{5.1}$$

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Rappelons que $\|T\|_{\mathcal{B}} = \sup\{\|Tf\|_{\mathcal{B}},\ f \in \mathcal{B},\ \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}$ et notons :

$$\|T\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \sup\{\|Tf\|_{\mathcal{B}_1},\ f \in \mathcal{B},\ \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

Rappelons que $\sigma(T)$ désigne le spectre de T (cf. chap. 3). Notons $\mathcal{A}(T)$ l'ensemble des parties A non vides de $\mathbb{C}$ telles que $d(A, \sigma(T)) > 0$. Pour tous $\kappa > 0$ et $A \in \mathcal{A}(T)$, on note :

$$\Delta_{\kappa,A} := A \cap \{z \in \mathbb{C},\ |z| \geq \kappa\}. \tag{5.2}$$

Théorème 5.1. `[Keller et Liverani.]` *Soient $t_0 \in \mathbb{R}^d$ et $I(t_0)$ un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}^d$. Soit $(U(t))_{t \in I(t_0)}$ une famille de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ vérifiant les hypothèses suivantes :*

(H_0) Il existe $\tilde{c}(t_0) > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \|U(t_0)f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \tilde{c}(t_0)\|f\|_{\mathcal{B}_1}, \tag{5.3}$$

(H_1) Il existe $c_1(t_0) > 0$, $\kappa_1(t_0) > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M_n(t_0) > 0$ de sorte que :

$$\forall t \in I(t_0), \forall f \in \mathcal{B},\ \|U(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1(t_0)\kappa_1(t_0)^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1(t_0)M_n(t_0)\|f\|_{\mathcal{B}_1}, \tag{5.4}$$

(H_2) $U(\cdot)$ est continue en t_0, au sens faible suivant :

$$\lim_{t\to t_0} \|U(t) - U(t_0)\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = 0. \tag{5.5}$$

Alors on a les propriétés suivantes :

(i) Pour tous $\kappa > \kappa_1(t_0)$ et $A \in \mathcal{A}(U(t_0))$, il existe un voisinage $J \subset I(t_0)$ de t_0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $(t, z) \in J \times \Delta_{\kappa,A}$,

$$R_z(t) := (zId - U(t))^{-1}$$

est défini dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

(ii) Les résolvantes de l'assertion (i) sont uniformément bornées pour $(t, z) \in J \times \Delta_{\kappa,A}$:

$$\sup\left\{\|(zId - U(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}},\ (t, z) \in J \times \Delta_{\kappa,A}\right\} < +\infty.$$

(iii) Les résolvantes de l'assertion (i) sont continues en t_0 au sens suivant :

$$\lim_{t\to t_0} \sup\left\{\|(zId - U(t))^{-1} - (zId - U(t_0))^{-1}\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1},\ z \in \Delta_{\kappa,A}\right\} = 0.$$

Comme $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_1$, la condition de continuité (H_2) est plus faible que la condition de continuité usuelle $\lim_{t\to t_0} \|U(t) - U(t_0)\|_{\mathcal{B}} = 0$ de la théorie standard de perturbation d'opérateurs. L'hypothèse supplémentaire (H_1) impose à la famille $(U(t))_{t\in I(t_0)}$ de vérifier des inégalités dites de Doeblin-Fortet, uniformément en $t \in I(t_0)$. La propriété de continuité (iii) obtenue pour les résolvantes s'exprime alors naturellement avec la norme des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}_1$. On notera que cette propriété est uniforme en $z \in \Delta_{\kappa,A}$.

Avant de démontrer le théorème 5.1, nous introduisons quelques réductions évidentes et des notations simplifiées. Tout d'abord nous pouvons supposer $t_0 = 0$, quitte à considérer la famille $(U(t + t_0))_{t\in I(t_0)-t_0}$, où $I(t_0) - t_0 = \{t - t_0, t \in I(t_0)\}$. Notons pour simplifier

$$I := I(0),\quad U := U(0),\quad \tilde{c} := \tilde{c}(0),\quad c_1 := c_1(0),\quad \kappa_1 := \kappa_1(0),\quad M_n := M_n(0).$$

Soit $\rho > 0$. La continuité de $z \mapsto (zId - U)^{-1}$ sur l'ensemble résolvant $\rho(U)$ de U (cf. (3.20)) implique que

$$\sup\left\{\|(zId - U)^{-1}\|_{\mathcal{B}},\ z \in \mathbb{C},\ d(z, \sigma(U)) \geq \rho,\ |z| \leq \|U\|_{\mathcal{B}} + 1\right\} < +\infty,$$

car $\{z \in \mathbb{C}, d(z, \sigma(U)) \geq \rho, |z| \leq \|U\|_{\mathcal{B}} + 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$, incluse dans $\rho(U)$. De plus, d'après (3.19), on a

$$\sup\left\{\|(zId - U)^{-1}\|_{\mathcal{B}}, z \in \mathbb{C}, |z| > \|U\|_{\mathcal{B}} + 1\right\} \leq 1.$$

Donc

$$\sup\left\{\|(zId-U)^{-1}\|_{\mathcal{B}},\ z\in\mathbb{C},\ d(z,\sigma(U))\geq\rho\right\}<+\infty. \tag{5.6}$$

Considérons alors $A\in\mathcal{A}(U)$ et $\rho:=d(A,\sigma(U))$. Comme $A\subset\{z\in\mathbb{C},\ d(z,\sigma(U))\geq\rho\}$, on a

$$\Delta_{\kappa,A}\subset A\subset\{z\in\mathbb{C},\ d(z,\sigma(U))\geq\rho\},$$

ce qui nous permet, d'après (5.6), de définir :

$$H:=\sup\left\{\|(zId-U)^{-1}\|_{\mathcal{B}},\ z\in\Delta_{\kappa,A}\right\}<+\infty. \tag{5.7}$$

En outre, d'après (5.4) et (5.1), en posant $c:=c_1(\kappa_1+\alpha M_1)$, on a pour tout $t\in I$,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{B}}\leq c\ \text{ et } \|U(t)-U\|_{\mathcal{B}}\leq 2c. \tag{5.8}$$

La démonstration du théorème 5.1 repose sur les quatre lemmes techniques suivants. Pour tout $z\in\rho(U)$, on note

$$R_z:=R_z(0)=(zId-U)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{B}).$$

Lemme 5.1. *Il existe $a>0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe $b_n>0$, de sorte que l'on ait pour tous $z\in\Delta_{\kappa,A}$ et $f\in\mathcal{B}$:*

$$\|R_zf\|_{\mathcal{B}_1}\leq a\left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^n\|f\|_{\mathcal{B}}+b_n\|f\|_{\mathcal{B}_1}.$$

Lemme 5.2. *Il existe $a_1>0$ et $a_2>0$ tels que pour tous $t\in I$ et $f\in\mathcal{B}$, on ait :*

$$\|f\|_{\mathcal{B}}\leq a_1\|f\|_{\mathcal{B}_1}+a_2\|(zId-U(t))f\|_{\mathcal{B}}.$$

Lemme 5.3. *Soient $\kappa>\kappa_1$ et $A\in\mathcal{A}(U)$. Il existe un voisinage $I_1\subset I$ de 0 tel que, pour tous $t\in I_1$ et $z\in\Delta_{\kappa,A}$, $zId-U(t)$ soit inversible à droite dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.*

Lemme 5.4. *Soient $\kappa>\kappa_1$ et $A\in\mathcal{A}(U)$. Il existe un voisinage $I_2\subset I$ de 0 et un réel $C>0$ tels que*

$$\forall t\in I_2,\ \forall z\in\Delta_{\kappa,A},\ \forall h\in\mathcal{B},\ \|h\|_{\mathcal{B}}\leq C\|(zId-U(t))h\|_{\mathcal{B}}.$$

Nous admettons provisoirement ces quatre lemmes et démontrons le théorème 5.1.

Démonstration du théorème 5.1.
(i) L'assertion *(i)* est une conséquence immédiate des lemmes 5.3 et 5.4. En effet, d'après le lemme 5.3, pour tous $(t,z)\in I_1\times\Delta_{\kappa,A}$, l'application $zId-U(t)$ est surjective et d'après le lemme 5.4, pour tout $(t,z)\in I_2\times\Delta_{\kappa,A}$, elle est injective. Posons $J=I_1\cap I_2$. Alors $J\subset I$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et, pour tout $(t,z)\in J\times\Delta_{\kappa,A}$, l'application $zId-U(t)$ est bijective, avec $(zId-U(t))^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{B})$ d'après le théorème de Banach.

(ii) Soient $t\in J$ et $f\in\mathcal{B}$. Le lemme 5.4, appliqué avec $h=(zId-U(t))^{-1}f$, nous donne directement l'assertion *(ii)*.

(iii) Soit $t\in J$. Rappelons que, pour $z\in\Delta_{\kappa,A}$, on note $R_z(t):=(zId-U(t))^{-1}$. On vérifie facilement que

$$R_z(t)-R_z=R_z\big(U(t)-U\big)R_z(t).$$

Soit $f \in \mathcal{B}$. En considérant le lemme 5.1 avec $(U(t)-U)R_z(t)f$ à la place de f, puis en utilisant la propriété (5.8) et la notation $\delta(t) := \|U(t)-U\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$, et enfin le lemme 5.2, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} &= \|R_z(U(t)-U)R_z(t)f\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n \|(U(t)-U)R_z(t)f\|_{\mathcal{B}} + b_n\|(U(t)-U)R_z(t)f\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq \big(2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\delta(t)\big)\|R_z(t)f\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \left(2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\delta(t)\right)\left(a_1\|R_z(t)f\|_{\mathcal{B}_1} + a_2\|f\|_{\mathcal{B}}\right). \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Or en utilisant (5.1) et (5.7), on a aussi :

$$\begin{aligned}
\|R_z(t)f\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|R_zf\|_{\mathcal{B}_1} + \|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq \alpha H\|f\|_{\mathcal{B}} + \|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1}.
\end{aligned}$$

La propriété (5.9) implique donc que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in J$ et $f \in \mathcal{B}$, on a :

$$\|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \left(2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\delta(t)\right)\left((a_1\alpha H+a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1\|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1}\right). \qquad (5.10)$$

Soit enfin $\varepsilon > 0$. Introduisons

$$\gamma := \min\,(\frac{1}{2}, \frac{a_1\varepsilon}{2(a_1\alpha H + a_2)}),$$

et fixons $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_0} \leq \frac{\gamma}{2a_1}$. La propriété de continuité faible (5.5) (i. e. $\lim_{t\to 0}\delta(t) = 0$) nous donne l'existence d'un voisinage K de 0, $K \subset J$, tel que, pour tout $t \in K$, $b_{N_0}\delta(t) \leq \frac{\gamma}{2a_1}$. On obtient alors avec (5.10) que, pour tout $t \in K$,

$$\|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{\gamma}{a_1}\big(a_1\alpha H + a_2\big)\|f\|_{\mathcal{B}} + \frac{1}{2}\|R_z(t)-R_zf\|_{\mathcal{B}_1}$$

et donc, pour tout $t \in K$:

$$\|(R_z(t)-R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} \leq 2\frac{\gamma}{a_1}\big(a_1\alpha H + a_2\big)\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon\|f\|_{\mathcal{B}},$$

ce qui prouve l'assertion *(iii)* du du théorème 5.1. □

Il reste à démontrer les quatre lemmes admis précédemment. Les trois premiers lemmes reposent sur l'identité classique suivante. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in I$ et $z \in \Delta_{\kappa,A}$, on a

$$Id - z^{-n}U(t)^n = \big(zId - U(t)\big)\sum_{i=0}^{n-1} z^{-(i+1)}U(t)^i = \sum_{i=0}^{n-1} z^{-(i+1)}U(t)^i\big(zId - U(t)\big). \qquad (5.11)$$

Démonstration du lemme 5.1. Soient $z \in \Delta_{\kappa,A}$, $f \in \mathcal{B}$. En appliquant (5.11) avec $t = 0$, on a

$$f = z^{-n}U^nf + (zId - U)\sum_{i=0}^{n-1} z^{-(i+1)}U^if.$$

Donc en composant par $R_z := (zId - U)^{-1}$ et en utilisant (5.1), (5.7), (5.3) et (5.4) en $t = 0$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\|R_z f\|_{\mathcal{B}_1} &\leq |z|^{-n}\|R_z U^n f\|_{\mathcal{B}_1} + \sum_{i=0}^{n-1} |z|^{-(i+1)}\|U^i f\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq \alpha H |z|^{-n}\|U^n f\|_{\mathcal{B}_1} + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\tilde{c}}{\kappa})^i\|f\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq \alpha H\kappa^{-n}\big(c_1\kappa_1^n\|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M_n\|f\|_{\mathcal{B}_1}\big) + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\tilde{c}}{\kappa})^i\|f\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq \alpha H c_1(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|f\|_{\mathcal{B}} + \Big(\alpha H\kappa^{-n}c_1 M_n + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\tilde{c}}{\kappa})^i\Big)\|f\|_{\mathcal{B}_1}
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité du lemme 5.1, avec les constantes suivantes : $a := \alpha H c_1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n := \alpha H\,\kappa^{-n}c_1 M_n + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\tilde{c}}{\kappa})^i$. □

Démonstration du lemme 5.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in I$ et $z \in \Delta_{\kappa,A}$. En appliquant l'égalité (5.11), puis en utilisant (5.4) et (5.8), on a, pour tout $f \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{B}} &\leq |z|^{-n}\|U(t)^n f\|_{\mathcal{B}} + \sum_{i=0}^{n-1}|z|^{-(i+1)}\|U(t)^i(zId - U(t))f\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq |z|^{-n}\big(c_1\kappa_1^n\|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M_n\|f\|_{\mathcal{B}_1}\big) + \sum_{i=0}^{n-1}|z|^{-(i+1)}\|U(t)\|_{\mathcal{B}}^i\|(zId - U(t))f\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq c_1(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|f\|_{\mathcal{B}} + \frac{c_1 M_n}{\kappa^n}\|f\|_{\mathcal{B}_1} + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{c}{\kappa})^i\|(zId - U(t))f\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Choisissons $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_1(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N'} \leq \frac{1}{2}$. On obtient alors l'inégalité souhaitée avec les constantes : $a_1 := 2\frac{c_1 M_{N'}}{\kappa^{N'}}$ et $a_2 := 2\frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{N'-1}(\frac{c}{\kappa})^i$. □

Démonstration du lemme 5.3. On a

$$\begin{aligned}
(zId - U(t))\big(\sum_{i=0}^{n-1} z^{-(i+1)}U(t)^i \quad + \quad z^{-n}U(t)^n R_z\big) & \\
&= Id - z^{-n}U(t)^n + z^{-n}U(t)^n\big(zId - U(t)\big)R_z \\
&= Id - z^{-n}U(t)^n\big(Id - \big(zId - U(t)\big)R_z\big) \\
&= Id - z^{-n}U(t)^n\Big((zId - U)R_z - \big(zId - U(t)\big)R_z\Big) \\
&= Id - z^{-n}U(t)^n\big(U(t) - U\big)R_z. \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Posons $U_n(t) := z^{-n}Q(t)^n(U(t) - U)R_z$. Soit $h \in \mathcal{B}$. En utilisant (5.4), (5.7), la notation $\delta(t) := \|U(t) - U\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$, et enfin (5.8), on a :

$$\begin{aligned}
\|U_n(t)h\|_{\mathcal{B}} &\leq |z|^{-n}\big(c_1\kappa_1^n\|(U(t) - U)R_z h\|_{\mathcal{B}} + c_1 M_n\|(U(t) - U)R_z h\|_{\mathcal{B}_1}\big) \\
&\leq \kappa^{-n}\big(2c_1 c H\kappa_1^n + c_1 M_n H\delta(t)\big)\,\|h\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Choisissons alors $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2c_1cH(\frac{\kappa_1}{\kappa})^N \leq \frac{1}{2}$ puis, grâce à (5.5) (i. e. $\lim_{t\to 0}\delta(t) = 0$), considérons un voisinage $I_1 \subset I$ de 0 tel que $\kappa^{-N}c_1M_NH\,\delta(t) \leq \frac{1}{4}$. On a alors, pour tout $t \in I_1$ et $z \in \Delta_{\kappa,A}$,

$$\|U_N(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{3}{4} < 1.$$

On en déduit que $Id - U_N(t)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ et donc, d'après l'égalité (5.12), que l'endomorphisme $zId - Q(t)$ est inversible à droite dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. □

Démonstration du lemme 5.4. Soit $h \in \mathcal{B}$. Appliquons le lemme 5.2 avec $f = h$ et le lemme 5.1 avec $f = (zId - U)h$. En se servant des inégalités élémentaires suivantes, qu'on démontre aisément en utilisant (5.8), la notation $\delta(t) := \|U(t) - U\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$, et (5.1)

$$\begin{aligned}
\|(zId - U)h\|_{\mathcal{B}} &\leq \|(U(t) - U)h\|_{\mathcal{B}} + \|(zId - U(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2c\|h\|_{\mathcal{B}} + \|(zId - U(t)\|_{\mathcal{B}} \\
\|(zId - U)h\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|(U(t) - U)h\|_{\mathcal{B}_1} + \|(zId - U(t)\|_{\mathcal{B}_1} \leq \delta(t)\|h\|_{\mathcal{B}} + \alpha\|(zId - U(t))h\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{\mathcal{B}} &\leq a_1\|h\|_{\mathcal{B}_1} + a_2\|(zId - U(t))h\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq a_1\big[a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n\|(zId - U)h\|_{\mathcal{B}} + b_n\|(zId - Q)h\|_{\mathcal{B}_1}\big] + a_2\|(zId - U(t))h\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq a_1\big[2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\delta(t)\big]\|h\|_{\mathcal{B}} + \big[a_1a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + a_1b_n\alpha + a_2\big]\|(zId - U(t))h\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Choisissons $N'' \in \mathbb{N}^*$ tel que $2a_1ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n \leq \frac{1}{4}$ puis, grâce à (5.5) (i. e. $\lim_{t\to 0}\delta(t) = 0$), considérons un voisinage $I_2 \subset I$ de 0 tel que $a_1b_{N''}\delta(t) \leq \frac{1}{4}$. On a alors, pour tout $t \in I_2$ et $z \in \Delta_{\kappa,A}$,

$$\|h\|_{\mathcal{B}} \leq C\|(zI - U(t))h\|_{\mathcal{B}}$$

avec $C := 2(a_1b_{N''}\alpha + a_1a(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N''} + a_2)$ ce qui termine la preuve du lemme 5.4. □

5.1.2 Raffinement du théorème 5.1 (vitesse de convergence).

Le résultat de la proposition suivante est également établi dans l'article [53] de Keller et Liverani. Ce résultat montre que, si le terme $M_n(t_0)$ de la condition (H_1) du théorème 5.1 est de la forme M^n, alors on peut améliorer l'assertion *(iii)* de ce théorème en précisant la vitesse de convergence vers 0 de

$$\sup\{\|(zId - U(t))^{-1} - (zId - U(t_0))^{-1}\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\,,\, z \in \Delta_{\kappa,A}\}.$$

Soient $t_0 \in \mathbb{R}^d$ et $I(t_0)$ un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}^d$. Soit $(U(t))_{t\in I(t_0)}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Les notations utilisées dans cette sous-section sont celles du théorème 5.1. Les hypothèses sont les suivantes :

Hypothèses. *On suppose que les conditions (H_0) (H_1) (H_2) du théorème 5.1 sont satisfaites, avec la précision suivante dans l'hypothèse (H_1) : il existe une constante $M > \kappa_1(t_0)$ tel que*

$$M_n(t_0) = M^n.$$

Pour tout $\kappa \in \big]\kappa_1(t_0), \max(\tilde{c}(t_0), M)\big[$, on définit

$$\tau(\kappa) := \frac{\ln \kappa - \ln \kappa_1(t_0)}{\ln \max(\tilde{c}(t_0), M) - \ln \kappa_1(t_0)} \in]0,1[.$$

Enfin, d'après l'hypothèse (H_2), on peut considérer une fonction $\varepsilon : I(t_0) \setminus \{t_0\} \to \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0$ et telle que

$$\forall t \in I(t_0) \setminus \{t_0\}, \quad \delta(t) := \|U(t) - U(t_0)\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \leq \varepsilon(t).$$

Rappelons que $\mathcal{A}(U(t_0))$ désigne l'ensemble des parties A non vides de $\mathbb{C}$ telles que la distance de A au spectre de $U(t_0)$ soit strictement positive, et que pour tous $\kappa > 0$ et $A \in \mathcal{A}(U(t_0))$, on note $\Delta_{\kappa,A} := A \cap \{z \in \mathbb{C},\, |z| \geq \kappa\}$.

Proposition 5.1. *Sous les hypothèses et notations précédentes, pour tout $A \in \mathcal{A}(U(t_0))$, quitte à diminuer le voisinage J de t_0 du théorème 5.1, il existe $D > 0$ tel que*

$$\forall t \in J, \quad \sup\left\{\|(zId - U(t))^{-1} - (zId - U(t_0))^{-1}\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1},\, z \in \Delta_{\kappa,A}\right\} \leq D\,\varepsilon(t)^{\tau}. \tag{5.13}$$

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 5.1, nous supposons $t_0 = 0$, et nous notons pour simplifier $\tilde{c} := \tilde{c}(0)$, $\kappa_1 := \kappa_1(0)$ et $M' := \max(\tilde{c}, M)$. Quitte à diminuer le voisinage J de 0, nous pouvons supposer que pour tout $t \in J \setminus \{0\}$, on a $0 < \varepsilon(t) \leq 1$. Considérons alors, pour tout $t \in J \setminus \{0\}$,

$$n(t) := \max\left\{n \in \mathbb{N}^*,\, \varepsilon(t) \leq (\frac{\kappa_1}{M'})^{n-1}\right\}.$$

Rappelons que, dans l'énoncé, κ est fixé tel que $\kappa \in]\kappa_1, M'[$, et que $\tau \in]0,1[$ est défini de sorte que $\dfrac{\kappa_1}{\kappa} = (\dfrac{\kappa_1}{M'})^{\tau}$. Soit $t \in J \setminus \{0\}$. Par définition de $n(t)$, on a $(\dfrac{\kappa_1}{M'})^{n(t)} < \varepsilon(t) \leq (\dfrac{\kappa_1}{M'})^{n(t)-1}$. On en déduit que

$$\frac{\kappa_1}{\kappa}\,\varepsilon(t)^{\tau} \leq (\frac{\kappa_1}{\kappa})^{n(t)} = \big((\frac{\kappa_1}{M'})^{n(t)}\big)^{\tau} < \varepsilon(t)^{\tau}.$$

Comme $\frac{M'}{\kappa} = (\frac{\kappa}{\kappa_1})^{\frac{1-\tau}{\tau}}$, il vient que

$$(\frac{M'}{\kappa})^{n(t)} \leq (\frac{\kappa}{\kappa_1})^{\frac{1-\tau}{\tau}}\varepsilon(t)^{\tau-1} \leq (\frac{M'}{\kappa_1})^{\frac{1-\tau}{\tau}}\varepsilon(t)^{\tau-1}.$$

Rappelons qu'on a noté $\delta(t) := \|U(t) - U\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$, puis que pour tout $z \in \Delta_{\kappa,A}$ et $t \in J$, on a posé $R_z(t) := (zId - U(t))^{-1}$, avec la notation simplifiée : $R_z := (zId - U)^{-1}$.

Nous repartons maintenant de l'inégalité (5.10) établie dans la preuve du théorème 5.1, que nous rappelons ici par commodité :

$$\|(R_z(t) - R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \left(2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^n + b_n\delta(t)\right)\left((a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1\|(R_z(t) - R_z)f\|_{\mathcal{B}_1}\right),$$

où $a, c, a_1, \alpha, H, a_2$ sont des constantes positives, qu'il n'est pas nécessaire de redéfinir ici. En revanche nous rappelons que la constante b_n provient du lemme 5.1, et qu'elle est définie par $b_n := \alpha H c_1(\frac{M}{\kappa})^n + \frac{1}{\kappa}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\tilde{c}}{\kappa})^i$ (voir la fin de la preuve du lemme 5.1). Remarquons qu'il existe $d > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $b_n \leq d\left(\frac{M'}{\kappa}\right)^n$. En considérant maintenant $n = n(t)$ dans l'inégalité ci-dessus, on a donc, comme $\delta(t) \leq \varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned}\|(R_z(t) - R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \left(2ac(\frac{\kappa_1}{\kappa})^{n(t)} + b_n\varepsilon(t)\right)\left((a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1\|(R_z(t) - R_z)f\|_{\mathcal{B}_1}\right) \\ &\leq (2ac + d(\frac{M'}{\kappa_1})^{\frac{1-\tau}{\tau}})\varepsilon(t)^\tau\left((a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1\|(R_z(t) - R_z)f\|_{\mathcal{B}_1}\right).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$, il existe un voisinage K de 0 dans $\mathbb{R}^d$, $K \subset J$, tel que $\forall t \in K \setminus \{0\}$,

$$a_1\big(2ac + d(\frac{M'}{\kappa_1})^{\frac{1-\tau}{\tau}}\big)\varepsilon(t)^\tau \leq \frac{1}{2}.$$

Alors $\forall t \in K \setminus \{0\}$,

$$\|(R_z(t) - R_z)f\|_{\mathcal{B}_1} \leq 2\big(2ac + d(\frac{M'}{\kappa_1})^{\frac{1-\tau}{\tau}}\big)\big(a_1\alpha H + a_2\big)\,\varepsilon(t)^\tau\|f\|_{\mathcal{B}},$$

ce qui démontre la propriété de la proposition 5.1. □

5.2 Perturbation faible d'un opérateur markovien fortement ergodique.

Dans cette section, on considère un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, et on désigne par Q un noyau markovien sur E, admettant une probabilité invariante, notée π. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)** définie au chapitre 4, rappelée ici par commodité : $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\pi)$ et $1_E \in \mathcal{B}$, ou bien $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{L}^1(\pi)$ et la classe $Cl(1_E)$ de 1_E (modulo π) est dans $\mathcal{B}$.

On suppose que Q opère continûment sur $\mathcal{B}$, et que Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $\hat{\kappa} \in [0, 1[$ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{B},\ \|Q^n f - \pi(f)1_E\|_{\mathcal{B}} \leq C\,\hat{\kappa}^n\,\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{5.14}$$

Soit I_0 un voisinage ouvert de $t = 0$ dans $\mathbb{R}^d$, et soit $(Q(t))_{t\in I_0}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ tels que $Q(0) = Q$.

Grâce au théorème 5.1, nous démontrons dans cette section que les conclusions de la proposition 3.7 subsistent sous une hypothèse différente de $\lim_{t\to 0}\|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B}} = 0$. Par la suite, ce résultat sera appliqué aux opérateurs de Fourier $Q(t)$ associés à une fonctionnelle additive markovienne pour étudier, comme au chapitre 4, la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$ du chapitre 2.

5.2.1 Propriétés de $Q(t)$ au voisinage de $t = 0$.

Comme au chapitre 4, on note Π le projecteur de rang 1 défini pour tout $f \in \mathcal{B}$ par

$$\Pi(f) = \pi(f)1_E.$$

Comme au chapitre 3, pour $\kappa \in [0,1[$, on note

$$\mathcal{D}_\kappa = \left\{ z \in \mathbb{C},\, |z| \geq \kappa,\ \ |z-1| \geq \frac{1-\kappa}{2} \right\}, \tag{5.15}$$

et on appelle $\Gamma_1(\kappa)$ (ou plus simplement Γ_1) le cercle orienté centré en $z=1$, de rayon $(1-\kappa)/2$, puis $\Gamma_0(\kappa)$ (ou Γ_0) le cercle orienté centré en $z=0$, de rayon κ. Remarquons à nouveau que Γ_1 et Γ_0 sont contenus dans $\mathcal{D}_\kappa$. Sous réserve d'existence, nous posons

$$\Pi(t) := \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} \big(zId - Q(t)\big)^{-1}\, dz. \tag{5.16}$$

La proposition suivante est donc, comme mentionné ci-dessus, l'analogue de la proposition 3.7 :

Proposition 5.2. *Supposons qu'il existe un espace vectoriel (semi-) normé $(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_1})$ tel que $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_1 \hookrightarrow I\!\!L^1(\pi)$, avec en outre $\|1_E\|_{\mathcal{B}_1} \neq 0$, et qu'il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}^d$, $I \subset I_0$, de sorte que la famille $(Q(t))_{t\in I}$ vérifie les hypothèses (H_0) (H_1) et (H_2) du théorème 5.1 en $t_0 = 0$ avec $\kappa_1(0) < 1$. Alors :*

(a) Pour tout $\kappa \in \big]\max(\hat{\kappa}, \kappa_1(0)), 1\big[$, il existe $R_\kappa > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathcal{D}_\kappa$ et tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, l'endomorphisme $R_z(t) := (zId - Q(t))^{-1}$ est défini dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. De plus,

$$\mathcal{M}_\kappa := \sup\left\{ \|(zId - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}},\ t \in \overline{B}(0, R_\kappa),\ z \in \mathcal{D}_\kappa \right\} < +\infty. \tag{5.17}$$

(b) Pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, l'intégrale curviligne (5.16) définit un projecteur continu de $\mathcal{B}$ qui commute avec $Q(t)$ et, quitte à diminuer la valeur de R_κ, on a $rg(\Pi(t)) = 1$.

(c) Quitte à diminuer à nouveau la valeur de R_κ, on a $\pi(\Pi(t)1_E) \neq 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \overline{B}(0, R_\kappa), \quad Q(t)^n = \lambda(t)^n \Pi(t) + N(t)^n, \tag{5.18}$$

avec :

$$\lambda(t) := \frac{\pi\big(Q(t)\Pi(t)1_E\big)}{\pi(\Pi(t)1_E)} \tag{5.19}$$

$$N(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} z^n (zId - Q(t))^{-1}\ dz. \tag{5.20}$$

Enfin on a $\Pi(0) = \Pi$ et $\lim_{t\to 0} \lambda(t) = \lambda(0) = 1$.

Remarque 5.1. *La condition (H_2) de la proposition 5.2 s'écrit : $\lim_{t\to 0} \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = 0$. Elle est plus faible que l'hypothèse de continuité en 0 de $t \mapsto Q(t)$ de la proposition 3.7 car $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_1$.*

Remarque 5.2. *Comme dans la proposition 3.7, $\lambda(t)$ sera construit comme la valeur propre dominante de $Q(t)$. Plus précisément, sous les hypothèses de la proposition 5.2, nous avons $\mathrm{Ker}(Q(t) - \lambda(t)Id) = \mathrm{Im}\ \Pi(t)$, et donc $Q(t)\Pi(t) = \lambda(t)\,\Pi(t)$.*

Remarque 5.3. *Supposons que les hypothèses de la proposition 5.2 soient satisfaites. Alors, comme au chapitre 3, on peut montrer que*

$$\sup_{t\in B(0,R_\kappa)} \|N(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{M}_\kappa\, \kappa^{n+1}, \tag{5.21}$$

d'où

$$\sup_{t\in B(0,R_\kappa)} \|Q(t)^n - \lambda(t)^n\Pi(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{M}_\kappa\, \kappa^{n+1},$$

et enfin qu'on a pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$:

$$\mathcal{N}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} N(t)^n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_0} \frac{z}{1-z}\left(zId - Q(t)\right)^{-1} dz. \tag{5.22}$$

5.2.2 Preuve de la proposition 5.2.

Notons pour simplifier κ_1 le réel $\kappa_1(0)$ de l'hypothèse (H_1). Nous utilisons la même démarche que celle exposée dans la preuve de la proposition 3.7. Le seul problème technique consiste à montrer que sous ces nouvelles hypothèses le projecteur $\Pi(t)$ défini en (5.16) est bien de rang 1 au voisinage de 0.

Preuve de l'assertion (a). Soit $\kappa \in]\max(\hat{\kappa}, \kappa_1), 1[$. Rappelons que l'hypothèse (5.14) de forte ergodicité implique que $\sigma(Q) \subset \overline{D}(0, \hat{\kappa}) \cup \{1\}$ (cf. Lemme 3.1), de sorte que $d(\mathcal{D}_\kappa, \sigma(Q)) > 0$. Ainsi, avec les notations du théorème 5.1, on a $\mathcal{D}_\kappa \in \mathcal{A}(Q)$ et (cf. (5.2))

$$\mathcal{D}_\kappa = \mathcal{D}_\kappa \cap \{z \in \mathbb{C},\ |z| \geq \kappa\} = \Delta_{\kappa,\mathcal{D}_\kappa}.$$

Appliquons le théorème 5.1 en considérant $A = \mathcal{D}_\kappa$, et en choisissant $R_\kappa > 0$ tel que le voisinage ouvert J de 0 dans $\mathbb{R}^d$ contienne la boule fermée $\overline{B}(0, R_\kappa)$ (rappelons que J dépend de κ dans le théorème 5.1). Alors les assertions *(i)* et *(ii)* du théorème 5.1 donnent exactement l'assertion *(a)* de la proposition 5.2. □

La suite de la preuve de la proposition 5.2 repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 5.5. `[Continuité faible de` $\Pi(t)$ `en 0.]` *On a :*

$$\lim_{t\to 0} \|\Pi(t) - \Pi\|_{\mathcal{B},\mathbb{L}^1(\pi)} = \lim_{t\to 0} \|\Pi(t) - \Pi\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = 0. \tag{5.23}$$

Lemme 5.6. *Il existe $D > 0$ tel que : $\forall t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, $\forall f \in Im\Pi(t)$, $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq D\|f\|_{\mathcal{B}_1}$.*

Admettons provisoirement ces deux lemmes et terminons la preuve de la proposition 5.2.

Preuves de l'assertion (b). L'existence, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, de l'intégrale curviligne (5.16) découle de l'assertion *(a)*, et $\Pi(t)$ définit ainsi un projecteur continu sur $\mathcal{B}$ qui commute avec $Q(t)$. Ces derniers points ont été détaillés dans le lemme 3.9 du chapitre 3, les arguments sont identiques ici. Pour démontrer que $rg(\Pi(t)) = 1$, nous allons adapter, grâce aux deux lemmes précédents, la preuve du lemme 3.10. Quitte à diminuer la valeur de R_κ, on peut supposer d'après le lemme 5.5 que, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, on a

$$\|\Pi(t) - \Pi\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \leq \frac{1}{2D}, \tag{5.24}$$

où D est la constante positive du lemme 5.6. Soit $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$ et soit $(f, g) \in \Pi(t)(\mathcal{B})^2$. Comme $rg(\Pi) = 1$, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que l'on ait $a\Pi(f) + b\Pi(g) = 0$. Posons

$h := af + bg \in \Pi(t)(\mathcal{B})$. On a $\Pi h = 0$ et comme $\Pi(t)$ est un projecteur, on a $\Pi(t)h = h$. Comme $h = \Pi(t)h - \Pi h$, le lemme 5.6 et l'inégalité (5.24) nous donnent

$$\|h\|_{\mathcal{B}} \leq D\|h\|_{\mathcal{B}_1} \leq D\|\Pi(t) - \Pi\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\|h\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{B}}.$$

D'où $h = 0$. La famille (f, g) est donc une famille liée de $\Pi(t)(\mathcal{B})$, et donc $rg(\Pi(t)) \leq 1$.
De plus, si l'on suppose l'existence de $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$ tel que $\Pi(t) = 0$, en utilisant à nouveau le lemme 5.6 et (5.24), on a

$$\|1_E\|_{\mathcal{B}_1} = \|\Pi 1_E\|_{\mathcal{B}_1} \leq \|\Pi - \Pi(t)\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}\|1_E\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{2D}\, D\, \|1_E\|_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{1}{2}\, \|1_E\|_{\mathcal{B}_1},$$

ce qui est absurde car $\|1_E\|_{\mathcal{B}_1} \neq 0$ par hypothèse. Finalement, pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, on a bien $rg(\Pi(t)) = 1$. □

Preuve de l'assertion (c). D'après le lemme 5.5, on a $\lim_{t\to 0} \pi(\Pi(t)1_E) = \pi(\Pi 1_E) = 1$. Donc, quitte à diminuer la valeur de R_κ, on peut supposer que : $\forall t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, $\pi(\Pi(t)1_E) \neq 0$. D'où $v(t) := \Pi(t)1_E \neq 0$. En procédant alors comme dans la preuve du lemme 3.11, on montre qu'il existe un unique $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ tel que $Q(t)v(t) = \lambda(t)v(t)$ et que l'on a (5.19). Les preuves de (5.18) et (5.20) ont été détaillées dans la sous-section 3.5.5 du chapitre 3. □

Il reste à démontrer les lemmes 5.5 et 5.6.

Preuve du lemme 5.5. D'après l'assertion *(iii)* du théorème 5.1, appliqué à la famille $(Q(t))_{t\in I}$ et avec $A = \mathcal{D}_\kappa$, on a :

$$\lim_{t\to 0} \sup\{\|(zId - Q(t))^{-1} - (zId - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1},\, z \in \mathcal{D}_\kappa\} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $r_\kappa \in]0, R_\kappa]$ tel que, pour tous $t \in \overline{B}(0, r_\kappa)$ et $z \in \mathcal{D}_\kappa$,

$$\|(zId - Q(t))^{-1} - (zId - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\kappa}.$$

Paramétrons le cercle $\Gamma_1 = \Gamma_1(\kappa)$ en posant $z(\theta) := 1 + \frac{1-\kappa}{2}e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. De l'inclusion $\Gamma_1(\kappa) \subset \mathcal{D}_\kappa$, on a donc pour $t \in \overline{B}(0, r_\kappa)$ et $f \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}
\|\Pi(t)f - \Pi(f)\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \left\| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[(zId - Q(t))^{-1} f - (zId - Q)^{-1} f \right] dz \right\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\, \frac{1-\kappa}{2} \int_0^{2\pi} \left\| \left[\big(z(\theta)Id - Q(t)\big)^{-1} f - \big(z(\theta)Id - Q\big)^{-1} f \right] \right\|_{\mathcal{B}_1} d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\, \frac{1-\kappa}{2} \int_0^{2\pi} \left\| \big(z(\theta)Id - Q(t)\big)^{-1} - (z(\theta)Id - Q)^{-1} \right\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \|f\|_{\mathcal{B}}\, d\theta \\
&\leq \varepsilon \|f\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

ce qui démontre bien que $\lim_{t\to 0} \|\Pi(t) - \Pi\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = 0$. On en déduit l'autre limite du lemme 5.5 car par hypothèse $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow I\!\!L^1(\pi)$. □

Pour établir le lemme 5.6, remarquons que, puisque $Q(t)$ commute avec le projecteur $\Pi(t)$, nous pouvons considérer l'endomorphisme continu de $\mathcal{L}(Im\Pi(t))$ induit par $Q(t)$ sur $Im\Pi(t)$:

$$L(t) := Q(t)_{|Im\Pi(t)}.$$

Commençons par établir le lemme suivant.

Lemme 5.7. *Pour tout $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, le spectre $\sigma(L(t))$ de $L(t)$ est contenu dans le disque fermé complexe $\overline{D}(1, \frac{1-\kappa}{2}) := \{z \in \mathbb{C},\ |z-1| \leq \frac{1-\kappa}{2}\}$.*

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$. Soient $\rho > 1 + \frac{1-\kappa}{2}$ et Γ_ρ le cercle orienté de centre $z = 0$ et de rayon ρ. Rappelons que $\Gamma_1(\kappa)$, noté simplement Γ_1, est le cercle orienté centré de centre 1 et de rayon $\frac{1-\kappa}{2}$. Remarquons que $\big((Q(t) - Id)\Pi(t)\big)^n = (Q(t) - Id)^n \Pi(t)$ car $Q(t)$ commute avec le projecteur $\Pi(t)$. En procédant alors comme dans la preuve du lemme 3.12, on montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$Q(t)^p\, \Pi(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} z^p (zId - Q(t))^{-1}\, dz,$$

d'où l'on déduit par la formule du binôme que

$$(Q(t) - Id)^n \Pi(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} (z-1)^n (zId - Q(t))^{-1}\, dz.$$

De cette dernière égalité et de (5.17), on déduit alors

$$\|\big((Q(t) - Id)\Pi(t)\big)^n\|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{M}_\kappa (\frac{1-\kappa}{2})^n.$$

Comme, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in Im\Pi(t)$, on a $(L(t) - Id)^n f = (Q(t) - Id)^n \Pi(t) f$, on obtient par la formule classique du rayon spectral (cf (3.2)) que

$$r\big(L(t) - Id_{|Im\Pi(t)}\big) \leq \frac{1-\kappa}{2}.$$

Par conséquent le spectre de $L(t) - Id_{|Im\Pi(t)}$ est contenu dans $\bar{D}(0, \frac{1-\kappa}{2})$ et comme on a $\sigma(L(t)) = \sigma\big(L(t) - Id_{|Im\Pi(t)}\big) + \{1\}$, l'inclusion du lemme 5.7 est prouvée. □

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 5.6.

Preuve du lemme 5.6. D'après le lemme 5.7, les éléments $z \in \sigma(L(t))$ sont tels que $|z| \geq \frac{1+\kappa}{2}$. En particulier, $0 \notin \sigma(L(t))$, donc $L(t)$ est un endomorphisme continu bijectif de $Im\Pi(t)$, et comme $\sigma(L(t)^{-1}) = \{\frac{1}{z},\ z \in \sigma(L(t))\}$, il vient

$$r(L(t)^{-1}) \leq \frac{2}{1+\kappa}.$$

Puisque $\kappa > \kappa_1 > 2\kappa_1 - 1$, on a $\frac{2}{1+\kappa} < \frac{1}{\kappa_1}$. Soit $r \in]\frac{2}{1+\kappa}, \frac{1}{\kappa_1}[$. D'après l'inégalité précédente, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\|L(t)^{-n}\|_{\mathcal{B}} \leq r^n$. Utilisons maintenant l'hypothèse (H_1). Pour tous $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$, $f \in Im\Pi(t)$ et $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{B}} &= \|L(t)^{-n} L(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \|L(t)^{-n}\|_{\mathcal{B}} \|L(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \|L(t)^{-n}\|_{\mathcal{B}} \big(c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M_n(0) \|f\|_{\mathcal{B}_1}\big) \\
&\leq c_1 (\kappa_1 r)^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M_n(0)\, r^n \|f\|_{\mathcal{B}_1}.
\end{aligned}$$

Choisissons $N' \geq N$ tel que $c_1 (\kappa_1 r)^{N'} \leq \frac{1}{2}$. On obtient alors que, pour tous $t \in \overline{B}(0, R_\kappa)$ et $f \in Im\Pi(t)$:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leq 2 c_1 M_{N'}(0)\, r^{N'} \|f\|_{\mathcal{B}_1},$$

ce qui démontre l'inégalité du lemme 5.6. □

5.3 Hypothèses équivalentes à l'hypothèse (NA).

Comme déjà indiqué, les résultats de la section précédente seront appliqués par la suite aux opérateurs de Fourier $Q(t)$ associés à une fonctionnelle additive d'une chaîne de Markov fortement ergodique, dans le but d'étudier la condition $\mathcal{R}_d(m)(i)$ du chapitre 2.

La condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ repose en revanche sur les propriétés spectrales de $Q(t)$ en dehors de $t = 0$. Comme on l'a vu au chapitre 4, la condition adaptée pour cette étude est l'hypothèse dite de non-arithméticité spectrale, dont on rappelle ci-dessous la formulation. Pour simplifier, nous considérons pour le moment cette hypothèse pour une famille quelconque $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}^d}$ d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est un espace de Banach complexe.

Hypothèse (NA). `[Hypothèse de non-arithméticité spectrale.]`
Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe $C_K > 0$ et $\rho_K \in [0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in K, \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_{_K} \cdot \rho_{_K}^n. \tag{5.25}$$

L'étude de l'hypothèse (NA) a été faite au chapitre 4 (cf. section 4.3.3) sous la condition de régularité $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$. Grâce au théorème 5.1, nous étendons ici cette étude sous une condition de continuité plus faible sur $Q(\cdot)$. Les énoncés obtenus sont analogues à ceux de la sous-section 4.3.3, en particulier la proposition suivante remplace la proposition 4.8.

Proposition 5.3. *Soit $(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_1})$ un espace semi-normé tel que $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_1$. Supposons que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, il existe un voisinage $I(t_0)$ de t_0 dans $\mathbb{R}^d$ de sorte que la famille $(Q(t))_{t\in I(t_0)}$ vérifie les hypothèses (H_0), (H_1) et (H_2) du théorème 5.1 avec $\kappa_1(t_0) \in]0,1[$. Alors :*

$$\textit{(NA)} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\; r(Q(t)) < 1.$$

Démonstration. Les arguments utilisés sont inspirés de [48, Lem. 12.3]. L'implication directe est évidente. Réciproquement, supposons que : $\forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\; r(Q(t)) < 1$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit $r_{_K} \in [0,1]$ défini par

$$r_{_K} := \sup\{r(Q(t)),\; t \in K\}.$$

Montrons par l'absurde que $r_K < 1$. Supposons donc $r_K = 1$. Soit $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de K telle que $\lim_k r(Q(\tau_k)) = 1$. Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \sigma(Q(\tau_k))$ tel que $|\lambda_k| = r(Q(\tau_k))$. La suite $(\tau_k)_k$ (resp. $(\lambda_k)_k$) étant une suite d'un compact de $\mathbb{R}^d$ (resp. de $\mathbb{C}$), on peut supposer désormais que ces deux suites convergent respectivement vers t_0 et λ. Remarquons que $t_0 \neq 0$ car $t_0 \in K$, et que $|\lambda| = 1$. Donc $\lambda \notin \sigma(Q(t_0))$ car on a par hypothèse $r(Q(t_0)) < 1$. Donc

$$\delta := \frac{1}{2} d\big(\lambda, \sigma(Q(t_0))\big) > 0.$$

Soient $\kappa \in]\kappa_1(t_0), 1[$ et $A := \{z \in \mathbb{C},\, d(z, \sigma(Q(t_0)) > \delta\}$. Comme $d(A, \sigma(Q(t_0)) \geq \delta > 0$, d'après le théorème 5.1, il existe un voisinage $J \subset I(t_0)$ de t_0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que l'on ait pour tout $t \in J$,

$$\sigma(Q(t)) \subset F_{\kappa,\delta} := \{z \in \mathbb{C},\, |z| \leq \kappa\} \cup \{z \in \mathbb{C},\, d(z, \sigma(Q(t_0)) \leq \delta\}. \tag{5.26}$$

Comme la suite $(\tau_k)_k$ converge vers t_0, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\tau_k \in J$ et donc, d'après (5.26), pour tout $k \geq k_0$, $\lambda_k \in F_{\kappa,\delta}$. Comme $F_{\kappa,\delta}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, on a $\lambda = \lim_k \lambda_k \in F_{\kappa,\delta}$. D'où $|\lambda| \leq \kappa < 1$ car $d(\lambda, \sigma(Q(t_0))) > \delta$, ce qui est en contradiction avec le fait que $|\lambda| = 1$. Donc on a bien $r_K < 1$.

Remarquons maintenant qu'il existe un ouvert $I(K)$ de $\mathbb{R}^d$ contenant K, puis des constantes $c_1(K) > 0$, $\kappa_1(K) \in]0,1[$, et $M_n(K) > 0$ tels que

$$\forall n \geq 1,\, \forall f \in \mathcal{B},\, \forall t \in I(K),\; \|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1(K)\kappa_1(K)^n \, \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1(K)M_n(K)\|f\|_{\mathcal{B}_1}. \quad (5.27)$$

En effet, l'hypothèse (H_1) étant vérifiée sur un voisinage ouvert $I(\tau)$ de tout $\tau \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a $K \subset \cup_{\tau\in K} W(\tau)$. D'après la propriété de Borel-Lebesgue, il existe donc des éléments $\tau_1, \ldots, \tau_p \in K$ tels que $K \subset I(K) := \cup_{k=1}^{p} W(\tau_k)$. Il suffit alors de considérer les constantes $c_1(K) := \max\limits_{k=1,\ldots,p} c_1(\tau_k)$, $\kappa_1(K) := \max\limits_{k=1,\ldots,p} \kappa_1(\tau_k)$ et $M_n(K) := \max\limits_{k=1,\ldots,p} M_n(\tau_k)$.

Considérons alors $\rho_K \in]\max(\kappa_1(K), r_K), 1[$ et notons Γ le cercle complexe orienté $\{|z| = \rho_K\}$. Remarquons que, pour tout $t \in K$, on a $d\big(\Gamma, \sigma(Q(t))\big) \geq \rho_K - r_K > 0$. Soit $\tau \in K$ quelconque. Remplaçons l'hypothèse initiale (H_2) (pour τ) par (5.27) avec $t \in I(\tau) \cap I(K)$ et appliquons le théorème 5.1 avec la famille $(Q(t))_{t\in I(\tau)\cap I(K)}$, $\kappa = \rho_K > \kappa_1(K)$ et $A = \Gamma = A \cap \{|z| \geq \kappa\}$: il existe un voisinage $J(\tau)$ de τ dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\sup\{\|(zId - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}},\, t \in J(\tau),\, z \in \Gamma\} < +\infty.$$

Comme $K \subset \cup_{\tau\in K} J(\tau)$, il existe, d'après la propriété de Borel-Lebesgue, $\tau_1, \ldots, \tau_r \in K$ tels que $K \subset \cup_{k=1}^{r} J(\tau_k)$. D'où

$$C_K := \sup\{\|(zId - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}},\, t \in K,\, z \in \Gamma\} < +\infty.$$

Or, pour tous $t \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a (cf. Preuve de (3.25))

$$Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} z^n (zId - Q(t))^{-1} dz.$$

On obtient bien finalement $\forall t \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_K \rho_K^n$. □

Comme au chapitre 4, pour étudier l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA), on peut utiliser l'hypothèse (RS), introduite page 98 et rappelée ci-dessous par commodité, qui permet de réduire la condition $r(Q(t)) < 1$ à une question de non-existence de valeur propre de module 1 pour $Q(t)$.

Hypothèse (RS)**.**

(i) $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $r(Q(t)) \leq 1$,

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $r(Q(t)) = 1$, *les valeurs spectrales de module 1 de* $Q(t)$ *sont des valeurs propres de* $Q(t)$.

Corollaire 5.1. *Si* $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}^d}$ *vérifie les hypothèses de la proposition 5.3 et l'hypothèse* (RS)*, alors :*

$$(NA) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\; Q(t) \text{ n'a pas de valeur propre de module 1.}$$

Pour terminer cette section, supposons que la famille $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}^d}$ soit définie par les opérateurs de Fourier associés à une probabilité de transition Q sur un espace mesurable E et à une fonction ξ mesurable de E dans $\mathbb{R}^d$. Rappelons que ceux-ci sont définis comme suit (cf page 92) :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad Q(t)(x,dy) = e^{i\langle t,\xi(y)\rangle}Q(x,dy). \tag{5.28}$$

La condition $(RS)(i)$ est en général vérifiée pour les opérateurs de Fourier car $Q(t)$ est dominé par Q (i. e. $|Q(t)f| \leq Q|f|$), mais elle n'est pas automatique pour autant car on notera que la propriété précédente n'implique pas nécessairement que $\|Q(t)f\| \leq \|\,Q|f|\,\|$.

Remarque 5.4. `[Sur la condition` $(RS)(ii)$`]`

- *La condition $(RS)(ii)$ est satisfaite si, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $Q(t)$ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (cf. page 114). Ce résultat, déjà utilisé dans la sous-section 4.6.2, sera aussi appliqué pour les modèles itératifs au chapitre 6.*
- *Lorsque $\mathcal{B}$ est un treillis de Banach, la condition $(RS)(i)$ est satisfaite et la condition $(RS)(ii)$ l'est si Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$. Rappelons que $\mathcal{B}$ est un treillis de Banach s'il possède la propriété suivante : $\forall (f,g) \in \mathcal{B}^2,\ |f| \leq |g| \ \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$. Ce résultat, qui est une conséquence de [67, Cor. 1.6], sera utilisé pour les deux exemples étudiés dans ce chapitre (cf section 5.6).*

Remarque 5.5. *Sous les hypothèses du corollaire 5.1, on peut réduire l'hypothèse (NA) à des conditions très simples de non-arithméticité ou non-lattice, portant directement sur la fonction ξ. Ces réductions sont exactement celles présentées dans la proposition 4.10 (et les preuves sont identiques).*

5.4 Une procédure de dérivation.

La régularité imposée dans l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2 requiert, quand on utilise la méthode spectrale, des propriétés de régularité (en t) de la résolvante $(zId - Q(t))^{-1}$, où $Q(t)$ désigne le noyau de Fourier. Dans le chapitre 4, pour obtenir cette régularité, nous avons utilisé la condition $\mathcal{U}_d(m)(ii)$, qui requiert que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ pour tout ouvert borné $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^d$. Nous développons dans cette section une procédure de dérivation des résolvantes qui repose sur l'utilisation d'une famille d'espaces emboités. Pour bien comprendre, d'une part les contraintes imposées en pratique par la condition $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, d'autre part l'intérêt d'utiliser plusieurs espaces, nous renvoyons à la conclusion du chapitre 4 et à l'introduction de ce chapitre.

La procédure développée ici est une adaptation de [48, App. A] permettant, d'une part d'étendre le résultat au cas m non entier, d'autre part de faire l'étude de l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ (qui n'est pas faite dans [48]). Cette approche, introduite dans un autre contexte dans [59, 38], a été développée dans le cadre du théorème de Keller et Liverani dans [42] et [29]. On trouvera dans [48] des références concernant les applications dans la méthode de Nagaev-Guivarc'h. Bien que nous appliquerons par la suite cette procédure aux noyaux de Fourier associés à une fonctionnelle additive markovienne, nous considérons dans cette section une famille générale d'opérateurs.

On utilisera les notations suivantes (déjà introduites au chapitre 3). Si $s \in \mathbb{R}_+^*$, $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace vectoriel normé, et enfin si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on rappelle que l'espace $\mathcal{C}_b^s(\mathcal{U}, X)$ est constitué des fonctions $F : \mathcal{U} \to X$ vérifiant les conditions suivantes :

- F est $\lfloor s \rfloor$ fois continûment différentiable sur $\mathcal{U}$,
- Les dérivées partielles d'ordre $j = 0, \ldots, \lfloor s \rfloor$ de F sont bornées sur $\mathcal{U}$,
- Les dérivées partielles d'ordre $\lfloor s \rfloor$ de F sont uniformément u-höldériennes sur $\mathcal{U}$, avec $u := s - \lfloor s \rfloor$.

La dernière propriété signifie, en notant $F^{(\lfloor s \rfloor)}$ une dérivée partielle d'ordre $\lfloor s \rfloor$ de F, que :

$$\sup \left\{ \frac{\|F^{(\lfloor s \rfloor)}(t) - F^{(\lfloor s \rfloor)}(t')\|_X}{\|t - t'\|^u},\ (t, t') \in \mathcal{U}^2,\ t \neq t' \right\} < \infty.$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in I}$ une famille d'espaces de Banach complexe. On note $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de $\mathcal{B}_\theta$ dans $\mathcal{B}_{\theta'}$, muni de la norme subordonnée notée $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'}}$.

On suppose l'existence d'un espace de Banach $\widetilde{\mathcal{B}}$ de la famille précédente tel que, pour tout $\theta \in I$, on ait $\mathcal{B}_\theta \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$. Soit $\widetilde{\mathcal{U}}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit $\{Q(t),\ t \in \widetilde{\mathcal{U}}\}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}})$ telle que

$$\forall t \in \widetilde{\mathcal{U}},\ \forall \theta \in I, \quad Q(t)_{|\mathcal{B}_\theta} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta).$$

Soient $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tau = m - \lfloor m \rfloor$. Commençons par introduire des conditions de régularité sur $t \mapsto Q(t)$. Pour cela, on va utiliser des fonctions T_0, T_τ, T_1 définies sur I, à valeurs réelles, commutant au sens suivant : *si $\theta \in I$ et si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n \in \{T_0, T_\tau, T_1\}$ sont telles que*

$$\mathcal{T}_n \cdots \mathcal{T}_1(\theta) \in I, \tag{5.29}$$

alors, pour tout $k = 1, \ldots, n$ et toute permutation σ de $\{1, \ldots, k\}$, on a :

$$\mathcal{T}_{\sigma(k)} \cdots \mathcal{T}_{\sigma(1)}(\theta) = \mathcal{T}_k \cdots \mathcal{T}_1(\theta) \in I. \tag{5.30}$$

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble dont les éléments sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ contenus dans $\widetilde{\mathcal{U}}$. On suppose que $\mathcal{V}$ est stable par intersection finie. L'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ suivante précise les conditions de régularité de l'application $Q(\cdot)$, considérée comme application d'un ouvert $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ dans un espace du type $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T(\theta)})$, où T est une composée de T_0, T_τ, T_1 :

Hypothèse $\mathcal{D}(m)$. *Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $\theta \in I$ et $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$:*

(0) *Pour tout $u \in \{0, \tau, 1\}$, $T_u(\theta) \in I \ \Rightarrow\ \mathcal{B}_\theta \hookrightarrow \mathcal{B}_{T_u(\theta)}$*

(1) *Pour tout $u \in \{0, \tau\}$, $T_u(\theta) \in I \ \Rightarrow\ Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^u\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T_u(\theta)})\big)$*

(2a) *Pour tout $j = 1, ..., \lfloor m \rfloor$, $T_1^j(\theta) \in I \ \Rightarrow\ Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^j\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T_1^j(\theta)})\big)$*

(2b) *Pour tout $j = 1, ..., \lfloor m \rfloor$, $T_\tau T_1^j(\theta) \in I \ \Rightarrow\ Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{j+\tau}\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{T_\tau T_1^j(\theta)})\big)$*

(3) *Il existe $a \in I$ tel que $T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a) \in I$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a)}$.*

Désormais a désignera un réel vérifiant l'hypothèse (**3**) précédente et les espaces $\mathcal{B}_a$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ joueront un rôle important dans les énoncés suivants.

Remarque 5.6. *Comme* $\mathcal{B}_{T_\tau T_1^{\lfloor m\rfloor}(a)} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$*, l'hypothèse* $\mathcal{D}(m)$**(2b)** *implique que, pour tout* $\mathcal{U}\in\mathcal{V}$*, on a* $Q(\cdot)\in\mathcal{C}_b^m(\mathcal{U},\mathcal{L}(\mathcal{B}_a,\widetilde{\mathcal{B}}))$.

Pour tout $\theta\in I$, on désigne par Δ_θ un ensemble dont les éléments sont des parties de $\mathbb{C}$. On suppose que l'ensemble $\{\Delta_\theta,\theta\in I\}$ est stable par intersection finie. L'hypothèse suivante précise les conditions d'existence des résolvantes $(zId-Q(t))^{-1}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$.

Hypothèse ($\mathcal{R}$). *Pour tous* $\theta\in I$ *et* $\mathcal{D}\in\Delta_\theta$*, il existe un ouvert* $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\theta,\mathcal{D})\in\mathcal{V}$ *tels que*

$$\forall (z,t)\in\mathcal{D}\times\mathcal{U},\quad (zId-Q(t))^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta),$$

$$\sup\left\{\,\|(zId-Q(t))^{-1}\|_\theta\ :\ (z,t)\in\mathcal{D}\times\mathcal{U}\,\right\}<+\infty.$$

Si l'hypothèse ($\mathcal{R}$) est vérifiée, on note pour tout $\theta\in I$ et tout $\mathcal{D}\in\Delta_\theta$:

$$\forall (z,t)\in\mathcal{D}\times\mathcal{U}(\theta,\mathcal{D}),\quad R_z(t)\ :=\ (zId-Q(t))^{-1}.$$

Proposition 5.4. *Soient* $m\in\mathbb{R}_+^*$ *et* $\tau=m-\lfloor m\rfloor$*. Supposons que les hypothèses* $\mathcal{D}(m)$ *et* ($\mathcal{R}$) *soient satisfaites. Alors il existe* $\mathcal{D}\in\Delta_a$ *et un ouvert* $\mathcal{U}=\mathcal{U}(a,\mathcal{D})\in\mathcal{V}$ *tels que, pour tout* $z\in\mathcal{D}$*, l'application* $t\mapsto R_z(t)$ *soit dans* $\mathcal{C}_b^m\big(\mathcal{U},\mathcal{L}(\mathcal{B}_a,\widetilde{\mathcal{B}})\big)$*. En outre on a :*

$$\forall \ell=0,\ldots,\lfloor m\rfloor,\quad \mathcal{R}_\ell:=\sup\left\{\|\,R_z^{(\ell)}(t)\|_{\mathcal{B}_a,\widetilde{\mathcal{B}}}\ :\ (z,t)\in\mathcal{D}\times\mathcal{U}\right\}<+\infty,$$

où $R_z^{(\ell)}(\cdot)$ *désigne une dérivée partielle quelconque d'ordre* ℓ *de* $R_z(\cdot)$*. De plus, si* $m\notin\mathbb{N}$*, la constante de Hölder d'ordre* τ *de* $R_z^{(\lfloor m\rfloor)}$ *sur* $\mathcal{U}$ *est uniformément bornée en* $z\in\mathcal{D}$*, i.e.*

$$\sup\left\{\frac{\|R_z^{(\lfloor m\rfloor)}(t)-R_z^{(\lfloor m\rfloor)}(t')\|_{\mathcal{B}_a,\widetilde{\mathcal{B}}}}{\|t-t'\|^\tau},\ (t,t')\in\mathcal{U}^2,\ t\neq t',\ z\in\mathcal{D}\right\}<+\infty.$$

Soulignons que Δ_θ, utilisé dans l'hypothèse ($\mathcal{R}$) ci-dessus, ne désigne pas une partie de $\mathbb{C}$, mais un ensemble de parties de $\mathbb{C}$. Par exemple, on peut considérer $\Delta_\theta=\{A_r,\ r>\rho_\theta\}$, où A_r désigne une partie de $\mathbb{C}$ et ρ_θ un réel strictement positif. Notons que, dans ce cas, la famille $\{\Delta_\theta,\theta\in I\}$ est bien stable par intersection finie. En effet, pour tous $(\theta_1,\theta_2)\in I^2$, on a $\Delta_{\theta_1}\cap\Delta_{\theta_2}=\{A_r,\ r>\max(\rho_{\theta_1},\rho_{\theta_2})\}=\Delta_\theta$, avec $\theta\in\{\theta_1,\theta_2\}$ tel que $\rho_\theta=\max(\rho_{\theta_1},\rho_{\theta_2})$. Dans la section suivante, nous appliquerons la proposition 5.4, d'une part dans le cas précédent avec $A_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|\geq r\}$, d'autre part dans le cas $\Delta_\theta=\{\mathcal{D}_\kappa,\ \kappa\in]\kappa_\theta,1[\}$, où $\mathcal{D}_\kappa$ est défini en (5.15), et où $(\kappa_\theta)_{\theta\in I}$ est une famille de réels de $]0,1[$.

La preuve de la proposition 5.4 est présentée pour simplifier dans le cas $d=1$. L'extension au cas $d\geq 2$ est immédiate puisqu'il suffit de remplacer les dérivées de l'opérateur $Q(t)$ du cas $d=1$ par les dérivées partielles de $Q(t)$ dans le cas $d\geq 2$. Introduisons maintenant quelques conventions et définitions.

Les notations $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\theta}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\theta,\mathcal{B}_{\theta'}}$ sont allégées et remplacées par la suite respectivement par $\|\cdot\|_\theta$ et $\|\cdot\|_{\theta,\theta'}$. La définition suivante, qui étend celle de $\mathcal{C}_b^s(\mathcal{U},\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta,\mathcal{B}_{\theta'}))$ au cas des fonctions $t\mapsto F_z(t)$ dépendant de la variable $z\in\mathbb{C}$, est adaptée à l'étude des résolvantes.

Définition 5.1. *Soient* $(\theta, \theta') \in I^2$, $s \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $u := s - \lfloor s \rfloor$.

Nous écrirons que $F = (F_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^s(\theta, \theta')$ *s'il existe un réel* $\beta \in I$ *tel que, pour tout* $\mathcal{D} \in \Delta_\beta$, *il existe* $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ *de sorte que :*

(a) $\forall (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}$, $F_z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$,

(b) $\forall z \in \mathcal{D}$, *l'application* $t \mapsto F_z(t)$ *est dans* $\mathcal{C}_b^{\lfloor s \rfloor}\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})\big)$,

(c) $\forall j = 0, ..., \lfloor s \rfloor$, $\sup\big\{\|F_z^{(j)}(t)\|_{\theta,\theta'}, (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}\big\} < \infty$, *où* $F_z^{(j)}(\cdot)$ *désigne une dérivée partielle quelconque d'ordre* j *de* $F_z(\cdot)$,

(d) $\forall z \in \mathcal{D}$, *l'application* $t \mapsto F_z^{(\lfloor s \rfloor)}(t)$ *est dans* $\mathcal{C}_b^u\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})\big)$, *et la constante de Hölder d'ordre* u *de* $F_z^{(\lfloor s \rfloor)}(\cdot)$ *sur* $\mathcal{U}$ *est uniformément bornée en* $z \in \mathcal{D}$.

Dans l'utilisation de cette définition, nous ferons par commodité l'abus de notation suivant. Soient $(\theta, \theta') \in I^2$, $s \in \mathbb{R}_+^*$, $F \in \mathcal{C}_b^s(\theta, \theta')$, et soit $(\theta_1, \theta_1') \in I^2$ tel que $\mathcal{B}_{\theta_1} \hookrightarrow \mathcal{B}_\theta$. Si, pour les éléments $\mathcal{D}$ et $\mathcal{U}$ de la définition ci-dessus, nous avons en outre $F_z(t)(\mathcal{B}_{\theta_1}) \subset \mathcal{B}_{\theta_1'}$ pour tout $(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}$, et si la restriction de $F_z(t)$ à $\mathcal{B}_{\theta_1}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $F_z(t)_{|\mathcal{B}_{\theta_1}} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_1'})$,
- $\big(F_z(\cdot)_{|\mathcal{B}_{\theta_1}}\big)_{z,t} \in \mathcal{C}_b^{s'}(\theta_1, \theta_1')$, pour un certain $s' \in \mathbb{R}_+^*$,

alors nous écrirons simplement que $F \in \mathcal{C}_b^{s'}(\theta_1, \theta_1')$. (Une notation plus rigoureuse du type $F \in \mathcal{C}_b^s(\theta, \theta')$ et $F_{\theta_1, \theta_1'} \in \mathcal{C}_b^{s'}(\theta_1, \theta_1')$ compliquerait inutilement les arguments à venir.)

Preuve de la Proposition 5.4. Introduisons l'assertion suivante :

$(\mathcal{P}_0)$ *Si* $\theta \in I$ *et* $T_\tau T_0(\theta) \in I$ *alors* $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^0\big(\theta, T_0(\theta)\big) \cap \mathcal{C}_b^\tau\big(\theta, T_\tau T_0(\theta)\big)$.

Puis, pour tout $\ell = 1, \dots, \lfloor m \rfloor$, posons $\mathcal{E}_\ell = \big\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3,\ i+j+k = \ell - 1\big\}$, et introduisons :

$(\mathcal{P}_\ell)$ *Si* $\theta \in I$ *et* $T_\tau T_1^\ell T_0^{\ell+1}(\theta) \in I$, *alors* $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^\ell\big(\theta, T_1^\ell T_0^{\ell+1}(\theta)\big)$, *avec*

$$R_z^{(\ell)}(t) = \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{E}_\ell} R_z^{(i)}(t)\, Q^{(1+j)}(t)\, R_z^{(k)}(t) \quad \text{et} \quad \big(R_z^{(\ell)}(t)\big)_{z,t} \in \mathcal{C}_b^\tau\big(\theta, T_\tau T_1^\ell T_0^{\ell+1}(\theta)\big).$$

Lemme 5.8. *La propriété* $(\mathcal{P}_0)$ *est satisfaite.*

Lemme 5.9. *La propriété* $(\mathcal{P}_1)$ *est satisfaite.*

Lemme 5.10. *Soient* $m \geq 2$ *et* $\ell \in \{1, \cdots, \lfloor m \rfloor - 1\}$. *Si les propriétés* $(\mathcal{P}_0), (\mathcal{P}_1), \dots, (\mathcal{P}_\ell)$ *sont vérifiées, alors on a* $(\mathcal{P}_{\ell+1})$.

Admettons provisoirement ces trois lemmes. Alors, par récurrence, la propriété $(\mathcal{P}_{\lfloor m \rfloor})$ est satisfaite. Or rappelons que $a \in I$ dans l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ est tel que $T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a) \in I$, et tel que $\mathcal{B}_{T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a)} = \widetilde{\mathcal{B}}$. Les conclusions de $(\mathcal{P}_{\lfloor m \rfloor})$, considérée avec $\theta = a$, donnent alors celles de la proposition 5.4. Plus précisément celles-ci sont satisfaites pour tout domaine $\mathcal{D}$ du plan complexe tel que $\mathcal{D} \in \Delta_\beta$, où β est un certain réel de I.

Dans l'énoncé de la proposition 5.4, on a considéré $\mathcal{D} \in \Delta_a$, ce qui est toujours possible en choisissant $\mathcal{D} \in \Delta_\beta \cap \mathcal{D}_a$. En fait, la propriété de départ $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^0\big(a, T_0(a)\big)$ de la propriété $(\mathcal{P}_0)$ (considéré avec $\theta = a$) nécessite de travailler avec des domaines $\mathcal{D} \in \Delta_a$ (cf. preuve du lemme 5.8). □

La suite de la section est consacrée à la démonstration des trois lemmes ci-dessus. Le prochain lemme, qui concerne la composition d'applications du type $F = (F_z(t))_{z,t}$, en est le point-clé.

Afin d'alléger les notations, si $U = (U_z(t))_{z,t}$ et $V = (V_z(t))_{z,t}$, on pose $UV := \big(U_z(t)V_z(t)\big)_{z,t}$, le produit $U_z(t)V_z(t)$ étant à considérer comme composition d'applications linéaires.

Lemme 5.11. *Soit* $(\theta_1,\, \theta_2,\, \theta_3,\, \theta_4) \in I^4$.

(i) Soit $k \in \mathbb{N}$. *Si* $\mathcal{B}_{\theta_1} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\theta_2}$, $\mathcal{B}_{\theta_3} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\theta_4}$ *et* $V \in \mathcal{C}_b^k(\theta_2, \theta_3)$, *alors*

$$V \in \mathcal{C}_b^k(\theta_2, \theta_4),\ V \in \mathcal{C}_b^k(\theta_1, \theta_3) \quad \textit{et}\ V \in \mathcal{C}_b^k(\theta_1, \theta_4).$$

(ii) Si $V \in \mathcal{C}_b^0(\theta_1, \theta_2)$ *et* $U \in \mathcal{C}_b^0(\theta_2, \theta_3)$, *alors* $UV \in \mathcal{C}_b^0(\theta_1, \theta_3)$.

(iii) Soit $u \in]0, 1]$. *Supposons que* $\mathcal{B}_{\theta_1} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\theta_2} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\theta_3} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\theta_4}$, *et que*

$$V \in \mathcal{C}_b^0(\theta_1, \theta_2), \quad U \in \mathcal{C}_b^u(\theta_2, \theta_4),$$

$$V \in \mathcal{C}_b^u(\theta_1, \theta_3), \quad U \in \mathcal{C}_b^0(\theta_3, \theta_4).$$

Alors $UV \in \mathcal{C}_b^u(\theta_1, \theta_4)$. *De plus, si* $u = 1$, *on a alors* $(UV)' = U'V + UV'$.

La preuve du lemme 5.11 est très simple, en particulier les points (i) et (ii) se justifient facilement. Nous donnons cependant une démonstration détaillée de l'assertion (iii) afin d'illustrer, d'une part la définition de $F = (F_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^\ell(\theta, \theta')$, d'autre part l'utilisation de la propriété de stabilité par intersection finie des ensembles Δ_θ et $\mathcal{V}$.

Démonstration de l'assertion (iii). Commençons par examiner le cas où $u \in]0, 1[$. Par définition de $V \in \mathcal{C}_b^0(\theta_1, \theta_2)$, il existe $\beta_{1,2} \in I$ tel que

$$\forall \mathcal{D} \in \Delta_{\beta_{1,2}},\ \exists \mathcal{U}_{1,2} \in \mathcal{V},\ \forall (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}_{1,2}, \quad V_z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_2}).$$

De même, on peut définir $\beta_{2,4} \in I$, $\beta_{1,3} \in I$, et enfin $\beta_{3,4} \in I$ tels que l'on ait :

- $\forall \mathcal{D} \in \Delta_{\beta_{2,4}},\ \exists \mathcal{U}_{2,4} \in \mathcal{V},\ \forall (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}_{2,4}, \quad U_z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_2}, \mathcal{B}_{\theta_4})$,
- $\forall \mathcal{D} \in \Delta_{\beta_{1,3}},\ \exists \mathcal{U}_{1,3} \in \mathcal{V},\ \forall (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}_{1,3}, \quad V_z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_3})$,
- $\forall \mathcal{D} \in \Delta_{\beta_{3,4}},\ \exists \mathcal{U}_{3,4} \in \mathcal{V},\ \forall (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}_{3,4}, \quad U_z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_3}, \mathcal{B}_{\theta_4})$,

avec en outre

$$C_{1,2} := \sup_{(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}} \|V_z(t)\|_{\theta_1,\theta_2} < +\infty, \qquad C_{2,4} := \sup_{(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}} \|U_z(t)\|_{\theta_2,\theta_4} < +\infty,$$

$$C_{1,3} := \sup_{(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}} \|V_z(t)\|_{\theta_1,\theta_3} < +\infty, \qquad C_{3,4} := \sup_{(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}} \|U_z(t)\|_{\theta_3,\theta_4} < +\infty.$$

Comme $\{\Delta_\theta, \theta \in I\}$ est stable par intersection finie, il existe $\beta \in I$ tel que Δ_β coïncide avec l'intersection des quatre ensembles $\Delta_{\beta_{1,2}}, \ldots, \Delta_{\beta_{3,4}}$. Soit $\mathcal{D} \in \Delta_\beta$. Comme $\mathcal{V}$ est stable par intersection finie, on peut définir $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ comme l'intersection des quatre ouverts $\mathcal{U}_{1,2}, \ldots, \mathcal{U}_{3,4}$ (définis à partir de $\mathcal{D}$). D'où : $\forall (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U},\ U_z(t)V_z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_4})$, avec

$$\sup \big\{ \|U_z(t)V_z(t)\|_{\theta_1,\theta_4},\ (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U} \big\} \leq C_{2,4}\, C_{1,2} < +\infty.$$

De plus, par hypothèse, il existe $D_{2,4} > 0$ et $D_{1,3} > 0$ tels que l'on ait pour tout $(t, t') \in \mathcal{U}^2$

$$\|U_z(t) - U_z(t')\|_{\theta_2,\theta_4} \leq D_{2,4}\, |t - t'|^u, \qquad \|V_z(t) - V_z(t')\|_{\theta_1,\theta_3} \leq D_{1,3}\, |t - t'|^u.$$

Soient maintenant $z \in \mathcal{D}$ et $(t,t') \in \mathcal{U}^2$. Partant de l'égalité évidente :

$$U_z(t)V_z(t) - U_z(t')V_z(t') = U_z(t)\big(V_z(t) - V_z(t')\big) + \big(U_z(t) - U_z(t')\big)V_z(t'),$$

on obtient bien que $UV \in \mathcal{C}_b^u(\theta_1, \theta_4)$ car

$$\|U_z(t)V_z(t) - U_z(t')V_z(t')\|_{\theta_1,\theta_4} \le C_{3,4}\, D_{1,3}\, |t-t'|^u + D_{2,4}\, |t-t'|^u\, C_{1,2}.$$

Examinons pour finir le cas $u = 1$. Soit $z \in \mathcal{D}$ et $(t,t_0) \in \mathcal{U}^2$. On a

$$\frac{U_z(t)V_z(t) - U_z(t_0)V_z(t_0)}{t-t_0} = U_z(t)\frac{V_z(t) - V_z(t_0)}{t-t_0} + \frac{U_z(t) - U_z(t_0)}{t-t_0}V_z(t_0),$$

avec par hypothèse :

$$\lim_{t\to t_0} \frac{V_z(t) - V_z(t_0)}{t-t_0} = V_z'(t_0) \ \text{ dans } \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_3}) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_0} U_z(t) = U_z(t_0) \ \text{ dans } \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_3}, \mathcal{B}_{\theta_4}),$$

$$V_z(t_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_2}) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_0} \frac{U_z(t) - U_z(t_0)}{t-t_0} = U_z'(t_0) \ \text{ dans } \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_2}, \mathcal{B}_{\theta_4}).$$

La fonction $U_z(\cdot)V_z(\cdot)$, de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_4})$, est donc dérivable sur $\mathcal{U}$, avec

$$\forall t \in \mathcal{U}, \quad (U_z(t)V_z(t))' = U_z'(t)V_z(t) + U_z(t)V_z'(t).$$

Plus précisément elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ d'après le point (ii), car par hypothèse on a

- $V_z(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_2}))$ et $U_z'(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_2}, \mathcal{B}_{\theta_4}))$
- $V_z'(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_3}))$ et $U_z(\cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_3}, \mathcal{B}_{\theta_4}))$. □

Dans la preuve des lemmes 5.8 et 5.9, nous utiliserons la remarque suivante. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach quelconque. Pour tous $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tels que S et $S-T$ soient inversibles, on a :

$$(S-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (S^{-1}T)^k S^{-1} + (S^{-1}T)^{n+1}(S-T)^{-1}. \tag{5.31}$$

Cette propriété résulte de l'identité classique suivante, vraie pour tout $W \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ Id = (\sum_{k=0}^{n} W^k)(Id - W) + W^{n+1}.$$

Rappelons que, par l'hypothèse $(\mathcal{R})$, pour tout $\theta \in I$ et pour toute partie $\mathcal{D}$ du plan complexe, $\mathcal{D} \in \Delta_\theta$, il existe un ouvert dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{U}(\theta, \mathcal{D}) \in \mathcal{V}$, tel que pour tout $(z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}(\theta, \mathcal{D})$ on ait $R_z(t) := (zId - Q(t))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$, et :

$$M(\theta, \mathcal{D}) := \sup\big\{\|R_z(t)\|_\theta, \ (z,t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{U}(\theta, \mathcal{D})\big\} < +\infty.$$

Preuve du lemme 5.8.
Soit $\theta \in I$ tel que $T_\tau T_0(\theta) \in I$. D'après les hypothèses sur T_0 et T_τ, il vient que $T_0(\theta) \in I$ et $T_\tau(\theta) \in I$. Considérons T_u, avec $u = 0$ ou $u = \tau$, et démontrons que $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^u(\theta, T_u(\theta))$. Avec $u = 0$, cette dernière propriété donne exactement la première conclusion souhaitée

dans $(\mathcal{P}_0)$. Avec $u = \tau$, elle implique bien que $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^{\tau}\big(\theta, T_\tau T_0(\theta)\big)$: en effet, on a $T_\tau T_0(\theta) = T_0\big(T_\tau(\theta)\big)$, donc $\mathcal{B}_{T_\tau(\theta)} \hookrightarrow \mathcal{B}_{T_\tau T_0(\theta)}$ d'après la condition **(0)** dans $\mathcal{D}(m)$, et on conclut en utilisant le lemme 5.11(i).

Démontrons donc que $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^u(\theta, T_u(\theta))$. Soit $\beta \in I$ tel que $\Delta_\beta = \Delta_\theta \cap \Delta_{T_u(\theta)}$. Pour $\mathcal{D} \in \Delta_\beta$ quelconque, on note $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\theta, \mathcal{D}) \cap \mathcal{U}(T_u(\theta), \mathcal{D})$. Par hypothèse, on a $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$, et d'après (5.31), considéré avec $n = 0$, $S = zId - Q(t_0)$ et $T = Q(t) - Q(t_0)$, on obtient pour tous $z \in \mathcal{D}$ et $t, t_0 \in \mathcal{U}$:

$$R_z(t) - R_z(t_0) = R_z(t_0)\,(Q(t) - Q(t_0))\,R_z(t).$$

D'où

$$\begin{aligned} \|R_z(t) - R_z(t_0)\|_{\theta, T_u(\theta)} &\leq \|R_z(t_0)\|_{T_u(\theta)} \|Q(t) - Q(t_0)\|_{\theta, T_u(\theta)} \|R_z(t)\|_\theta \\ &\leq M(T_u(\theta), \mathcal{D})\,\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\theta, T_u(\theta)}\,M(\theta, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

La condition **(1)** de $\mathcal{D}(m)$ nous permet alors de conclure immédiatement. □

Preuve du lemme 5.9.
Pour $(\theta, \theta') \in I^2$ tels que $\mathcal{B}_\theta \hookrightarrow \mathcal{B}_{\theta'}$, on utilisera ci-dessous la notation

$$C(\theta, \theta') := \sup\Big\{\frac{\|f\|_{\theta'}}{\|f\|_\theta},\ f \in \mathcal{B}_\theta,\ f \neq 0\Big\},$$

et la remarque évidente : $\forall U \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, c B_{\theta'}),\ \|U\|_{\theta,\theta'} \leq C(\theta, \theta')\,\|U\|_\theta$.

Soit $\theta \in I$, et soient $\theta_1 = T_0(\theta)$, $\theta_2 = T_1 T_0(\theta)$ et $\theta_3 = T_0 T_1 T_0(\theta) = T_1 T_0^2(\theta)$. Le fait que $T_\tau T_1 T_0^2(\theta) \in I$ et les hypothèses sur T_0, T_τ, T_1 impliquent que $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in I$. Soit

$$\Delta = \Delta_\theta \cap \Delta_{\theta_1} \cap \Delta_{\theta_2} \cap \Delta_{\theta_3},$$

puis pour $\mathcal{D} \in \Delta$, soit

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\theta, \mathcal{D}) \cap \mathcal{U}(\theta_1, \mathcal{D}) \cap \mathcal{U}(\theta_2, \mathcal{D}) \cap \mathcal{U}(\theta_3, \mathcal{D}).$$

Soit $z \in \mathcal{D}$. Pour tous $(t_0, t) \in \mathcal{U}^2$, l'égalité (5.31), utilisée avec $n = 1$ et à nouveau avec $S = zId - Q(t_0)$ et $T = Q(t) - Q(t_0)$, nous donne

$$R_z(t) = R_z(t_0) \ +\ R_z(t_0)\big(Q(t) - Q(t_0)\big)R_z(t_0) \ +\ \vartheta_z(t),$$

avec $\vartheta_z(t) := R_z(t_0)\big(Q(t) - Q(t_0)\big)R_z(t_0)\big(Q(t) - Q(t_0)\big)R_z(t)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\|\vartheta_z(t)\|_{\theta,\theta_3}}{|t - t_0|} &\leq \|R_z(t_0)\|_{\theta_3} \|Q(t) - Q(t_0)\|_{\theta_2,\theta_3} \|R_z(t_0)\|_{\theta_2} \frac{\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\theta_1,\theta_2}}{|t - t_0|} \|R_z(t)\|_{\theta,\theta_1} \\ &\leq M(\theta_3, \mathcal{D})\,\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\theta_2,\theta_3}\,M(\theta_2, \mathcal{D})\,\frac{\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\theta_1,\theta_2}}{|t - t_0|}\,C(\theta, \theta_1)\,M(\theta, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Les hypothèses **(1)** et **(2a)** de $\mathcal{D}(m)$ impliquent alors que le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand t tend vers t_0, uniformément en $z \in \mathcal{D}$. Considérons

$$Q'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\theta_1}, \mathcal{B}_{\theta_2}).$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\big\|R_z(t_0)\big(Q(t)-Q(t_0)\big)R_z(t_0)-(t-t_0)R_z(t_0)Q'(t_0)R_z(t_0)\big\|_{\theta,\theta_3}& \\
&\le \|R_z(t_0)\|_{\theta_2,\theta_3}\big\|Q(t)-Q(t_0)-(t-t_0)Q'(t_0)\big\|_{\theta_1,\theta_2}\|R_z(t_0)\|_{\theta,\theta_1}\\
&\le C(\theta_2,\theta_3)\,M(\theta_2,\mathcal{D})\,\big\|Q(t)-Q(t_0)-(t-t_0)Q'(t_0)\big\|_{\theta_1,\theta_2}C(\theta,\theta_1)\,M(\theta,\mathcal{D})\\
&= o(|t-t_0|).
\end{aligned}
$$

Les estimations précédentes nous donnent

$$\|R_z(t)-R_z(t_0)-(t-t_0)R_z(t_0)Q'(t_0)R_z(t_0)\|_{\theta,\theta_3}=o(|t-t_0|).$$

En d'autres termes, l'application $t\mapsto R_z(t)$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta,\mathcal{B}_{\theta_3})$ est dérivable en t_0 avec

$$R_z'(t_0)=R_z(t_0)Q'(t_0)R_z(t_0)\in\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta,\mathcal{B}_{\theta_3})\subset\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta,\mathcal{B}_{T_\tau T_1T_0^2(\theta)}),$$

la dernière inclusion provenant de $T_\tau T_1T_0^2(\theta)=T_\tau(\theta_3)$ (donc $\mathcal{B}_{\theta_3}\hookrightarrow\mathcal{B}_{T_\tau T_1T_0^2(\theta)}$ d'après la propriété **(0)** de $\mathcal{D}(m)$). Les deux premiers points de $(\mathcal{P}_1)$ sont ainsi démontrés.
Pour finir la preuve de $(\mathcal{P}_1)$, il reste à prouver que $(R_z(t)Q'(t)R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^\tau\big(\theta,T_\tau T_1T_0^2(\theta)\big)$. Par commodité, certaines propriétés du type $(F_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^u\big(\theta,T_0(\theta)\big)$ seront souvent réécrites plusieurs fois ci-dessous afin de faciliter l'application de l'assertion (iii) du lemme 5.11. Tout d'abord la propriété $(\mathcal{P}_0)$ (cf. lemme 5.8) et l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ donnent

$$(R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^0\big(\theta,T_0(\theta)\big),\qquad Q'(\cdot)\in\mathcal{C}_b^\tau\big(T_0(\theta),T_1T_0(\theta)\big),$$

d'où, d'après le lemme 5.11(ii) :

$$(V_z(t))_{z,t}:=(Q'(t)R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^0\big(\theta,T_1T_0(\theta)\big).$$

A nouveau, la propriété $(\mathcal{P}_0)$ et l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ nous donnent

$$(R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^0\big(\theta,T_0(\theta)\big),\qquad Q'(\cdot)\in\mathcal{C}_b^\tau\big(T_0(\theta),T_\tau T_1T_0(\theta)\big)$$

$$(R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^\tau\big(\theta,T_\tau(\theta)\big),\qquad Q'(\cdot)\in\mathcal{C}_b^0\big(T_\tau(\theta),T_1T_\tau(\theta)\big)\subset\mathcal{C}_b^0\big(T_\tau(\theta),T_\tau T_1T_0(\theta)\big)$$

la dernière inclusion provenant de $T_\tau T_1T_0(\theta)=T_0\big(T_1T_\tau(\theta)\big)$, puis de **(0)** dans $\mathcal{D}(m)$ et du lemme 5.11(i). L'assertion (iii) du lemme 5.11 donne donc

$$(V_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^\tau\big(\theta,T_\tau T_1T_0(\theta)\big).$$

En appliquant une dernière fois la propriété $(\mathcal{P}_0)$, et en réécrivant ci-dessous (par commodité) les deux dernières propriétés obtenues pour $(V_z(t))_{z,t}$, on a

$$(V_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^0\big(\theta,T_1T_0(\theta)\big),\qquad (R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^\tau\big(T_1T_0(\theta),T_0T_\tau T_1T_0(\theta)\big).$$

$$(V_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^\tau\big(\theta,T_\tau T_1T_0(\theta)\big),\qquad (R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^0\big(T_\tau T_1T_0(\theta),T_0T_\tau T_1T_0(\theta)\big),$$

(Utiliser en outre **(0)** dans $\mathcal{D}(m)$ et le lemme 5.11(i) pour obtenir la première propriété ci-dessus sur $R_z(t)$.) Le lemme 5.11(iii) à nouveau donne donc

$$(R_z(t)V_z(t))_{z,t}=(R_z(t)Q'(t)R_z(t))_{z,t}\in\mathcal{C}_b^\tau\big(\theta,T_0T_\tau T_1T_0(\theta)\big),$$

ce qui démontre bien la propriété souhaitée car $T_0 T_\tau T_1 T_0(\theta) = T_\tau T_1 T_0^2(\theta)$. $\square$

Démonstration du lemme 5.10.
Pour simplifier, nous omettons les variables z et t désormais. Comme précédemment, par commodité, certaines propriétés du type $(F_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^u\big(\theta, T_0(\theta)\big)$ seront souvent réécrites plusieurs fois. Rappelons que, pour $s \in \mathbb{N}^*$, on a noté $\mathcal{E}_s = \big\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3,\ i+j+k = s-1\big\}$, et que la propriété $(\mathcal{P}_s)$ s'énonce de la manière suivante : si $\theta' \in I$ et $T_\tau T_1^s T_0^{s+1}(\theta') \in I$, alors $(R_z(t))_{z,t} \in \mathcal{C}_b^s\big(\theta', T_1^s T_0^{s+1}(\theta')\big)$, avec

$$R_z^{(s)}(t) = \sum_{(i,j,k)\in\mathcal{E}_s} R_z^{(i)}(t)\, Q^{(1+j)}(t)\, R_z^{(k)}(t) \quad \text{et} \quad \big(R_z^{(s)}(t)\big)_{z,t} \in \mathcal{C}_b^\tau\big(\theta', T_\tau T_1^s T_0^{s+1}(\theta')\big).$$

Soit $m \geq 2$, et soit $\ell \in \{1, \cdots, \lfloor m \rfloor - 1\}$ tel que les propriétés $(\mathcal{P}_0), (\mathcal{P}_1), \ldots, (\mathcal{P}_\ell)$ soient vérifiées. Nous devons montrer qu'on a $(\mathcal{P}_{\ell+1})$. Soit $\theta \in I$ tel que $T_\tau T_1^{\ell+1} T_0^{\ell+2}(\theta) \in I$. De la propriété $(\mathcal{P}_\ell)$ et de $\mathcal{B}_{T_1^\ell T_0^{\ell+1}(\theta)} \hookrightarrow \mathcal{B}_{T_1^{\ell+1} T_0^{\ell+2}(\theta)}$, on déduit que

$$R \in \mathcal{C}_b^\ell\big(\theta, T_1^{\ell+1} T_0^{\ell+2}(\theta)\big), \quad \text{avec} \quad R^{(\ell)} = \sum_{(i,j,k)\in\mathcal{E}_\ell} R^{(i)}\, Q^{(1+j)}\, R^{(k)}.$$

Soit $(i,j,k) \in \mathcal{E}_\ell$. Nous devons donc démontrer les propriétés suivantes :

(α) $R^{(i)} Q^{(1+j)} R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^1\big(\theta, T_1^{\ell+1} T_0^{\ell+2}(\theta)\big)$

(β) $\big(R^{(i)} Q^{(1+j)} R^{(k)}\big)' = R^{(i+1)} Q^{(1+j)} R^{(k)} + R^{(i)} Q^{(2+j)} R^{(k)} + R^{(i)} Q^{(1+j)} R^{(k+1)}$

(γ) Les trois applications de la somme précédente appartiennent à $\mathcal{C}_b^\tau\big(\theta, T_\tau T_1^{\ell+1} T_0^{\ell+2}(\theta)\big)$.

Démontrons (α). Comme $k \leq \ell$, on obtient en utilisant $(\mathcal{P}_k)$ et l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$:

$$R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^0\big(\theta, T_1^k T_0^{k+1}(\theta)\big) \quad \text{et} \quad Q^{(1+j)} \in \mathcal{C}_b^0\big(T_1^k T_0^{k+1}(\theta), T_1^{j+k+1} T_0^{k+1}(\theta)\big), \tag{5.32}$$

d'où, par le lemme 5.11(ii) :

$$Q^{(1+j)} R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^0\big(\theta, T_1^{j+k+1} T_0^{k+1}(\theta)\big). \tag{5.33}$$

En réécrivant la première propriété de (5.32), et en utilisant l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$, on a :

$$R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^0\big(\theta, T_1^k T_0^{k+1}(\theta)\big) \quad \text{et} \quad Q^{(1+j)} \in \mathcal{C}_b^1\big(T_1^k T_0^{k+1}(\theta), T_1^{j+k+2} T_0^{k+2}\theta\big).$$

(Utiliser en outre $\mathcal{B}_{T_1^{j+k+2} T_0^{k+1}(\theta)} \hookrightarrow \mathcal{B}_{T_1^{j+k+2} T_0^{k+2}(\theta)}$ et le lemme 5.11(i) pour la dernière propriété.) De plus, comme $1 \leq k+1 \leq \ell$, on obtient en utilisant $(\mathcal{P}_{k+1})$ et l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$:

$$R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^1\big(\theta, T_1^{k+1} T_0^{k+2}(\theta)\big) \quad \text{et} \quad Q^{(1+j)} \in \mathcal{C}_b^0\big(T_1^{k+1} T_0^{k+2}(\theta), T_1^{j+k+2} T_0^{k+2}(\theta)\big).$$

Le lemme 5.11(iii) nous donne donc :

$$Q^{(1+j)} R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^1\big(\theta, T_1^{j+k+2} T_0^{k+2}(\theta)\big). \tag{5.34}$$

Posons $W := Q^{(1+j)} R^{(k)}$. Alors, en réécrivant la propriété (5.33), et en utilisant $(\mathcal{P}_{i+1})$ (noter que $i+1 \leq \ell$), on a :

$$W \in \mathcal{C}_b^0\big(\theta, T_1^{j+k+1} T_0^{k+1}(\theta)\big) \quad \text{et} \quad R^{(i)} \in \mathcal{C}_b^1\big(T_1^{j+k+1} T_0^{k+1}(\theta), T_1^{i+j+k+2} T_0^{i+k+3}(\theta)\big),$$

puis en réécrivant la propriété (5.34) et en utilisant $(\mathcal{P}_i)$, on a :

$$W \in \mathcal{C}_b^1\big(\theta, T_1^{j+k+2}T_0^{k+2}(\theta)\big) \quad \text{et} \quad R^{(i)} \in \mathcal{C}_b^0\big(T_1^{j+k+2}T_0^{k+2}(\theta), T_1^{i+j+k+2}T_0^{i+k+3}(\theta)\big).$$

Le lemme 5.11(iii) nous donne donc

$$R^{(i)}\,W = R^{(i)}Q^{(1+j)}R^{(k)} \in \mathcal{C}_b^1\big(\theta, T_1^{i+j+k+2}T_0^{i+k+3}(\theta)\big).$$

D'où la propriété (α) car on a $i+j+k+2 = \ell+1$ et $i+k+3 \leq \ell+2$.

On obtient facilement la propriété (β) en utilisant ce qui précède et en appliquant la formule de dérivation du lemme 5.11(iii), d'une part pour calculer $(R^{(i)}\,W)'$, d'autre part pour calculer $W' = (Q^{(1+j)}R^{(k)})'$. Enfin la propriété (γ) s'établit en introduisant T_τ, et en répétant les arguments ci-dessus à chacun des trois termes intervenant dans la somme de l'égalité (β). $\square$

5.5 Application : étude des hypothèses $\mathcal{R}_d(m)(i)$ et $\mathcal{R}_d(m)(ii)$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $(E,\mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x,dy)$, de probabilité Q-invariante π, et de probabilité initiale μ. Soit $\xi : E \to \mathbb{R}^d$ mesurable. La fonctionnelle additive $(S_n)_n$ associée est définie comme au chapitre 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(X_k).$$

Les noyaux de Fourier $Q(t)$ associés à Q et ξ sont définis en (5.28).

En appliquant les résultats des sections précédentes aux noyaux de Fourier, nous présentons ici des conditions suffisantes pour que l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2, qui fournit les théorèmes de renouvellement en toute dimension, soit satisfaite. Les corollaires 5.2 et 5.3 ci-dessous seront appliqués dans la section suivante dans le cadre des chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques et des chaînes ρ-mélangeantes, et au chapitre suivant dans le cas des modèles itératifs lipschitziens.

Pour $f : E \to [0,+\infty[$ mesurable fixée, et ici dans notre cadre markovien avec la donnée de la loi initiale μ de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$, l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2 porte sur la fonction (de type) caractéristique : $\mathbb{E}_\mu[f(X_n)\,e^{i\langle\cdot,S_n\rangle}]$.

Hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$**.** *Il existe une famille d'espace de Banach $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in I}$, telle que pour tout $\theta \in I$:*
- *$\mathcal{B}_\theta$ vérifie l'hypothèse* **(B)** *(cf. p. 84),*
- *La probabilité de transition Q définit un opérateur fortement ergodique sur $\mathcal{B}_\theta$ (cf. (5.14)),*
- *Les noyaux de Fourier $Q(t)$ associés à Q et ξ opèrent continument sur $\mathcal{B}_\theta$.*

L'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ a été introduite dans la section précédente. Le premier énoncé concerne l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$.

Corollaire 5.2. *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ soit satisfaite, et qu'en outre :*
(a) $Q(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ vis-à-vis de $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in I}$ et $\mathcal{V} := \{B(0,r),\ r>0\}$,

(b) $Q(\cdot)$ vérifie les hypothèses de la proposition 5.2 sur chaque espace $\mathcal{B}_\theta$.

Alors l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$ est satisfaite pour toute probabilité initiale $\mu \in \widetilde{\mathcal{B}}'$ et pour toute fonction positive $f \in \mathcal{B}_a$, les espaces $\mathcal{B}_a$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ étant ceux donnés dans la proposition 5.4. En outre la fonction $L(\cdot)$ de l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$ vérifie $L(0) = \pi(f)$.

Démonstration. En procédant comme dans la preuve de la proposition 4.7 du chapitre 4, le corollaire 5.2 est une conséquence du lemme suivant, qui redonne exactement les mêmes conclusions que la proposition 3.8, en remplaçant $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ par l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}})$ des applications linéaires continus de $\mathcal{B}_a$ dans $\widetilde{\mathcal{B}}$. □

Lemme 5.12. *Sous les conditions du corollaire 5.2, les éléments perturbés de la proposition 5.2 vérifient les propriétés suivantes (on note $B := B(0, R)$ pour simplifier) :*

(i) $\Pi(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(B, \mathcal{L}(\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}}))$

(ii) Pour tout $n \geq 1$, $N_n(\cdot) := N(\cdot)^n \in \mathcal{C}_b^m(B, \mathcal{L}(\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}}))$, et il existe $\tilde{\kappa} \in (0, 1)$ tel que :

$$\forall \ell = 0, \ldots, \lfloor m \rfloor,\ \exists C_\ell > 0,\ \forall n \geq 1,\ :\quad \sup_{t \in B} \|N_n^{(\ell)}(t)\|_{\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}}} \leq C_\ell\, \tilde{\kappa}^n,$$

(iii) $\lambda(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(B, \mathbb{C})$.

(iv) $\mathcal{N}(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(B, \mathcal{L}(\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}}))$.

Démonstration. D'après la condition (b) et les conclusions de la proposition 5.2, l'hypothèse $(\mathcal{R})$ de la proposition 5.4 est satisfaite avec les ensembles $\Delta_\theta := \{\mathcal{D}_\kappa,\ \kappa \in]\hat{\kappa}_\theta, 1[\}$ pour un certain $\hat{\kappa}_\theta \in]0, 1[$. En utilisant la proposition 5.4 et les intégrales curvilignes (5.16), (5.20) (sur les cercles Γ_0 et Γ_1 définis à partir de $\kappa \in]\hat{\kappa}_a, 1[$ quelconque), les propriétés de régularité souhaitées pour $\Pi(\cdot)$ et $N_n(\cdot)$ se déduisent alors par dérivation sous le signe intégral. Puisque $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^m(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}}))$, la régularité de $\lambda(\cdot)$ se déduit de (5.19). Celle de $\mathcal{N}(\cdot) := \sum_{n=1}^{+\infty} N(\cdot)^n$ s'établit aussi par dérivation sous le signe intégral (cf. (5.22)). □

Passons à l'étude de la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$, qui repose sur l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ et sur l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA) (cf. p. 132). Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$ dont l'adhérence est contenue dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Corollaire 5.3. *Supposons que l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ soit satisfaite, et que l'on ait en outre :*

(a) $Q(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ avec $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta \in I}$ et $\mathcal{V}$ défini ci-dessus,

(b) Pour tout $\theta \in I$, $Q(\cdot)$ vérifie l'hypothèse (NA) sur $\mathcal{B}_\theta$.

Alors l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ est satisfaite pour toute probabilité initiale $\mu \in \widetilde{\mathcal{B}}'$ et pour toute fonction positive $f \in \mathcal{B}_a$, les espaces $\mathcal{B}_a$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ étant ceux donnés dans la proposition 5.4.

On renvoie à la section 5.3, notamment au corollaire 5.1 et aux remarques 5.4 et 5.5, pour l'étude et les réductions de l'hypothèse (NA).

Démonstration du corollaire 5.3. En utilisant le lemme 4.3 (p. 93), le corollaire 5.3 est une conséquence du lemme suivant. □

Lemme 5.13. *Si les conditions du corollaire 5.3 sont satisfaites, alors pour tout* $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$*, on a :* $\mathcal{Q}(\cdot) := \sum_{n=1}^{+\infty} Q(\cdot)^n \in \mathcal{C}_b^m\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_a, \widetilde{\mathcal{B}})\big)$.

Démonstration. Soient $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ et $K = \overline{\mathcal{U}}$, et pour tout $\theta \in I$, soit $\rho(\theta) = \rho_K(\theta)$ le réel de $]0,1[$ relatif à l'hypothèse (NA) considérée sur l'espace $\mathcal{B}_\theta$. Soit $r_\theta(Q(t))$ le rayon spectral de $Q(t)$ considéré comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$. Alors on a $r_\theta(Q(t)) \leq \rho(\theta)$ (cf. lemme 3.6 p. 74). Définissons $\Delta_\theta := \{A_{\rho'},\ \rho' > \rho_\theta\}$, avec $A_{\rho'} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \rho'\}$. La famille $\{\Delta_\theta, \theta \in I\}$ est clairement stable par intersection finie. En outre, l'hypothèse $(\mathcal{R})$ de la section précédente est satisfaite : en effet, en utilisant les résultats classiques de théorie spectrale (cf. section 3.4), on montre facilement que, pour $\theta \in I$ et $\mathcal{D} \in \Delta_\theta$ (i. e. $\mathcal{D} = A_{\rho'}$ avec $\rho' > \rho_\theta$), les conclusions de l'hypothèse $(\mathcal{R})$ sont vérifiées avec l'ouvert $\mathcal{U}(\theta, \mathcal{D}) = \mathcal{U}$. Par ailleurs, en fixant $\rho' \in]\rho(a), 1[$, où $a \in I$ est l'élément donné dans l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$, et en considérant le cercle orienté $\Gamma_{\rho'}$ de centre 0 et de rayon ρ', on peut montrer (exactement comme dans le lemme 4.5) que l'on a l'égalité suivante dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_a)$:

$$\forall t \in K,\quad \mathcal{Q}(t) := \sum_{n=1}^{+\infty} Q(t)^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_{\rho'}} \frac{z}{1-z} \big(zId - Q(t)\big)^{-1} dz.$$

Grâce à la proposition 5.4, la propriété de régularité souhaitée pour $\mathcal{Q}(\cdot)$ s'établit alors par dérivation sous le signe intégral. □

Remarque 5.7. *On notera que si les hypothèses du corollaires 5.2 sont satisfaites avec* $m = 1$ *et* $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|] < +\infty$ *pour tout* $n \geq 1$ *(resp. avec* $m = 2$ *et* $\mathbb{E}_\mu[\|S_n\|^2] < +\infty$*), alors le vecteur moyen* $\vec{m}$ *(resp. la matrice de covariance asymptotique* Σ*) peut être défini comme dans la proposition 4.12 (resp. les propositions 4.13-4.14), mais ici la probabilité initiale* μ *doit être dans le dual de l'espace* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *correspondant à l'hypothèse* $\mathcal{D}(1)$ *(resp.* $\mathcal{D}(2)$*).*

Remarque 5.8. *Même dans le cas centré en dimension* $d \geq 5$*, où le théorème de renouvellement 2.4 est démontré sous l'hypothèse* $\mathcal{R}_d(m)$ *avec l'ordre optimal* $m = m_d$ *(i. e. l'ordre du cas i.i.d.), l'application des corollaires 5.2-5.3 ne permettra pas dans les prochains exemples d'obtenir les propriétés de renouvellement sous la condition de moment optimale. Ce fait est dû à l'application de la procédure de dérivation de la section 5.4. En effet, lorsque la fonction* ξ *n'est pas bornée, la propriété* $Q_k \in \mathcal{C}_b^0(\mathcal{U}, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$ *n'est pas vérifiée avec* $\theta' = \theta$*, mais avec* $\theta' = T_0(\theta)$ *(typiquement,* $\theta' := \theta + \varepsilon_0$*). La présence de* T_0 *dans la procédure de dérivation induit ainsi un "écart" entre les espaces* $\mathcal{B}_a$ *et* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *un peu plus grand que celui espéré. Ceci explique pourquoi, dans les applications de la section suivante et du chapitre 6, l'ordre des conditions de moment sera toujours* $m_d + \varepsilon$ *avec* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit.*

Enfin mentionnons que l'étude du cas lattice, présentée dans la section 4.6 du chapitre 4, peut être étudiée ici de la même façon. Supposons que la fonction ξ (et donc S_n) soit à valeurs dans un sous-groupe fermé $\mathbb{S}$ (de dimension d) de $\mathbb{R}^d$. Rappelons que, pour obtenir les théorèmes de renouvellement du cas lattice, la condition $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ doit être remplacée par la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ de la section 2.5 (cf. page 60). Grâce au lemme 4.3, la propriété de convergence uniforme dans la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ est satisfaite pour f positive (appartenant à un certain espace $\mathcal{B}$) si, pour tout compact K de $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{S}^*$, il existe des constantes $C_K > 0$ et $\rho_K \in [0,1[$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in K,\quad \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq C_K\, \rho_K^n. \tag{5.35}$$

Le corollaire 5.3 peut alors être adapté au cas lattice comme suit : sous la condition (a) du corollaire 5.3, et si la condition (5.35) est satisfaite sur tous les espaces $\mathcal{B}_\theta$ de l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$, alors la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ est vérifiée avec f et μ comme indiqué dans le corollaire 5.3. La proposition 4.17 se généralise de la manière suivante. Sous la condition (a) du corollaire 5.3, et si les opérateurs de Fourier $Q(t)$ vérifient l'hypothèse (RS) (cf page 133) sur chaque $\mathcal{B}_\theta$, alors la condition $\mathcal{R}'_d(m)(ii)$ est vérifiée avec f et μ comme indiqué dans le corollaire 5.3 si, et seulement si, ξ n'est pas arithmétique dans $\mathbb{S}$ relativement à $\mathcal{B}_a$ (cf page 112).

5.6 Exemples.

Dans cette section, on applique les résultats théoriques précédents aux chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques et aux chaînes de Markov ρ-mélangeantes. Ces premiers exemples montrent l'intérêt de la méthode spectrale généralisée en termes de conditions de moment (comparer les résultats des sous-sections 5.6.1 et 5.6.2 avec ceux obtenus pour ces deux exemples à la fin du chapitre 4).

Les notations et données probabilistes (markoviennes) sont celles utilisées précédemment : $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x, dy)$, de probabilité Q-invariante π, et de loi initiale μ. Les espaces mis en jeu dans cette section vérifie l'hypothèse **(B)** définie au chapitre 4 (page 84), et on rappelle que Q est dit fortement ergodique sur un tel espace $\mathcal{B}$ s'il existe $C > 0$ et $\hat{\kappa} \in [0, 1[$ tels que :

$$\forall n \geq 1, \forall f \in \mathcal{B}, \|Q^n f - \pi(f)1_E\|_{\mathcal{B}} \leq C\hat{\kappa}^n \|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{5.36}$$

On considère $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ une fonction π-intégrable de E dans $\mathbb{R}^d$, et la fonctionnelle additive associée $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k)$, $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que ξ est π-centrée (ou simplement centrée) si $\pi(\xi_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, d$. Les noyaux de Fourier $Q(t)$ associés à Q et ξ sont définis en (5.28).

Pour les deux modèles markoviens traités dans cette section, les familles d'espaces utilisées ont été introduites dans [48]. Les conditions de dérivabilité des opérateurs de Fourier sont également faits dans [48], l'extension à un ordre de régularité fractionnaire présentée ci-dessous est simple.

Pour la commodité du lecteur, on rappelle la condition non-lattice markovienne, déjà présentée au chapitre 4 (page 98).

On dit que ξ est non-lattice s'il n'existe pas de d-uplet $b \in \mathbb{R}^d$, de sous-groupe fermé $(H, +)$ de $(\mathbb{R}^d, +)$, $H \neq \mathbb{R}^d$, de sous-ensemble $A \in \mathcal{E}$, Q-absorbant et enfin de fonction mesurable bornée $\theta : E \to \mathbb{R}^d$ de sorte que

$$\forall x \in A, \quad \xi(y) + \theta(y) - \theta(x) \in b + H \quad Q(x, dy)p.s.$$

Nous admettons ici que, pour les deux exemples de cette section, si ξ est non-lattice, alors la matrice de covariance asymptotique Σ, associée à $(S_n)_n$, est automatiquement définie positive, voir [48, Sect. 5].

Les théorèmes de renouvellement du chapitre 2 (cf. le corollaire 2.1 et les théorèmes 2.4 et 2.6) ont été démontrés sous l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d + \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit (et m_d redonné ci-dessous). On fera référence aux propriétés de renouvellement (4.37), (4.38) et (4.39), présentées dans la section 4.4, qui sont les conclusions (attendues dans notre cadre markovien) déduites des théorèmes de renouvellement du chapitre 2. Enfin on rappelle que la valeur m_d dépend de la dimension d et des condition de centrage (ou non) sur ξ :

- si $d = 1$, on pose $m_1 = 1$ et on suppose $\pi(\xi) > 0$,
- si $d = 2$, on pose $m_2 = 2$ et on suppose ξ non-centrée (ie $\vec{m} := \pi(\xi) \neq 0$)),
- si $d \geq 3$, on pose
  - $m_d = \max(d-2, 2)$ si ξ est centrée (ie $\vec{m} := \pi(\xi) = 0$)),
  - $m_d = \max(\frac{d-1}{2}, 2)$ si ξ est non-centrée.

5.6.1 Application aux chaînes de Markov v-géométriquement ergodiques.

Nous considérons ici l'exemple 4 du chapitre 4 où $v : E \to [1, +\infty[$ est fixée et $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov v-géométriquement ergodique. Cette dernière propriété signifie que l'opérateur de transition Q est fortement ergodique sur l'espace de Banach $(\mathcal{B}_v, \|\cdot\|_v)$ composé des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_v = \sup_{x\in E} |f(x)|/v(x) < +\infty$. En particulier, on a $Qv \in \mathcal{B}_v$ et $\pi(v) < +\infty$.

Corollaire 5.4. *Soit $\xi : E \to \mathbb{R}^d$, nonlattice, telle que :*

$$\exists \delta_0 > 0,\ \exists C > 0, \quad \|\xi\|^{m_d+\delta_0} \leq C\, v. \tag{5.37}$$

Soit $a \in]0, 1 - \frac{m_d}{m_d+\delta_0}[$. Alors, pour toute probabilité initiale μ sur E telle que $\mu(v) < +\infty$ et pour toute fonction mesurable $f : E \to [0, +\infty[$ telle que f/v^a soit bornée et $\pi(f) \neq 0$, les propriétés de renouvellement (4.37), (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage) sont satisfaites.

Démonstration. Soit $m \in]m_d, (1-a)m_d+\delta_0[$. Pour établir les propriétés (4.37), (4.38) et (4.39), nous allons démontrer, en utilisant les résultats de la section 5.5, que l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)$ du chapitre 2 est vérifiée. Pour cela, considérons, pour tout $\theta \in]0, 1]$, l'espace de Banach $(\mathcal{B}_\theta, \|\cdot\|_\theta)$ des fonctions f de E dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\|f\|_\theta := \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{v(x)^\theta} < +\infty.$$

La proposition 5.5 ci-dessous montre que la famille d'espaces $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in]0,1]}$ satisfait l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ (cf page 143). En particulier, pour tout $\theta \in]0, 1]$, Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}_\theta$. La proposition 5.5 montrera en outre que les opérateurs de Fourier $Q(t)$ vérifient les hypothèses des propositions 5.2 et 5.3 sur $\mathcal{B}_\theta$. Par ailleurs, la proposition 5.6 montrera que $Q(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ relativement à la famille $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in[a,1]}$, avec le réel a de l'énoncé, $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_v$ et $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$. Considérons maintenant une probablité μ et une fonction f vérifiant les hypothèses du corollaire 5.4 : $f \in \mathcal{B}_a$ et μ définit une forme linéaire continue sur $\widetilde{\mathcal{B}}$. Alors, d'après le corollaire 5.2, l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$ est satisfaite. Enfin, les espaces $\mathcal{B}_\theta$ étant des treillis de Banach, la condition (RS) est vérifiée car Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}_\theta$ (cf remarque 5.4 page 134). Les hypothèses du corollaire 5.1 sont donc satisfaites de sorte que l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA) (sur chaque $\mathcal{B}_\theta$) est équivalente à ξ non-lattice. D'après le corollaire 5.3, l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ est donc vérifiée. $\square$

Proposition 5.5. *La famille d'espaces $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in]0,1]}$ satisfait l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ (cf page 143). En outre, pour tout $\theta \in]0,1]$, les noyaux de Fourier $Q(t)$ vérifient sur $\mathcal{B}_\theta$ les hypothèses des propositions 5.2 et 5.3.*

Démonstration. Par hypothèse Q opère continûment sur $\mathcal{B}_v$, donc sur $\mathcal{B}_\theta$ en appliquant l'inégalité de Jensen. Il est alors facile de voir que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, le noyau de Fourier $Q(t)$ opère aussi continûment sur $\mathcal{B}_\theta$. Par hypothèse, Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}_v$. La forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}_\theta$, pour tout $\theta \in]0,1]$, s'obtient alors en utilisant le lien entre la forte ergodicité et les conditions "drift". On admet ici ce résultat, voir [48, Lem. 10.1]. Il existe donc $C_\theta > 0$ et $\widehat{\kappa}_\theta \in [0,1[$ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{B}_\theta,\ \|Q^n f - \pi(f)1_E\|_\theta \leq C_\theta \hat{\kappa}_\theta^n \|f\|_\theta. \tag{5.38}$$

Vérifions maintenant que la famille $(Q(t))_{t\in[a,1]}$ vérifie les hypothèses des propositions 5.2 et 5.3 sur $\mathcal{B}_\theta$, avec la semi-norme auxiliaire $\pi(|\cdot|)$. La propriété (H_0) est évidente. Pour établir (H_1), remarquons que si $f \in \mathcal{B}_\theta$, alors on a $|f| \in \mathcal{B}_\theta$ avec $\||f|\|_\theta = \|f\|_\theta$ et que si $u, v \in \mathcal{B}_\theta$ sont telles que $|u| \leq |v|$, alors on a $\|u\|_\theta \leq \|v\|_\theta$ (i. e. $\mathcal{B}_\theta$ est un treillis de Banach). Soient $f \in \mathcal{B}_\theta$, $t \in \mathbb{R}^d$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $|Q(t)^n f| \leq Q^n|f|$, on a donc, avec (5.38) :

$$\|Q(t)^n f\|_\theta \leq \|Q^n|f|\|_\theta \leq C_\theta \hat{\kappa}_\theta^n \|f\|_\theta + \pi(|f|)\,\|1_E\|_\theta. \tag{5.39}$$

D'où (H_1). Enfin, comme π est Q-invariante, on a pour $f \in \mathcal{B}_\theta$ et $t, t_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\pi(|Q(t)f - Q(t_0)f|) \leq \pi(|e^{i\langle(t-t_0),\,\xi\rangle} - 1|\,|f|) \leq \|f\|_\theta\, \pi(|e^{i\langle(t-t_0),\,\xi\rangle} - 1|\, v^\theta).$$

Donc $\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\mathcal{B}_\theta, \mathbb{L}^1(\pi)} \leq \pi(|e^{i\langle(t-t_0),\,\xi\rangle} - 1|\, v^\theta)$. Or $\pi(v^\theta) < +\infty$, donc par convergence dominée, $\lim_{t\to t_0} \pi(|e^{i\langle t,\,\xi\rangle} - 1|\, v^\theta) = 0$. D'où (H_2). $\square$

Proposition 5.6. *Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$. Soient a le réel du corollaire 5.4 et $m \in]m_d, (1-a)(m_d+\delta_0)[$. Alors $Q(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ relativement à la famille $(\mathcal{B}_\theta)_{\theta\in[a,1]}$.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons, pour simplifier, $Q_k(x, dy)$ l'un *quelconque* des noyaux de transition $Q_{(p_1,\ldots,p_d)}$ définis en (4.25) avec $(p_1, \cdots, p_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $p_1 + \cdots + p_d = k$. L'étude de l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ repose sur le lemme technique suivant où l'on a posé pour simplifier $\eta := m_d + \delta_0$:

Lemme 5.14. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soient $0 < \theta < \theta' \leq 1$ et $\tau \in]0,1[$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

(i) Si $\theta + \frac{k}{\eta} < \theta'$, alors $Q_k \in \mathcal{C}_b^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'}))$.

(ii) Si $\theta + \frac{k+\tau}{\eta} \leq \theta'$, alors $Q_k \in \mathcal{C}_b^\tau(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'}))$.

(iii) Si $\theta + \frac{k+1}{\eta} < \theta'$, alors $Q_k \in \mathcal{C}_b^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'}))$.

Admettons provisoirement ce lemme et démontrons que l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ est vérifiée comme indiqué dans la proposition. Rappelons que $\eta := m_d + \delta_0$. Par hypothèse sur m, $a \in]0, 1 - \frac{m}{\eta}[$. Soient $\tau = m - \lfloor m \rfloor$ et $\delta > 0$ tels que $a + m/\eta + (2\lfloor m \rfloor + 1)\delta/\eta = 1$. Notons enfin $I := [a, 1]$ et pour tout $\theta \in I$:

$$T_0(\theta) := \theta + \delta/\eta, \quad T_\tau(\theta) := \theta + \tau/\eta, \quad T_1(\theta) := \theta + (1+\delta)/\eta.$$

Il est clair que (5.29) implique (5.30) et que $T_\tau T_1^{\lfloor m \rfloor} T_0^{\lfloor m \rfloor + 1}(a) = 1$. L'hypothèse **(0)** de l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ est clairement vérifiée. L'hypothèse **(1)** de $\mathcal{D}(m)$ résulte des propriétés (i) et (ii) du lemme 5.14 (avec $k = 0$), en considérant respectivement $\theta' = T_0(\theta)$ et $\theta' = T_\tau(\theta)$. Enfin les hypothèses **(2a)** et **(2b)** de $\mathcal{D}(m)$ s'obtiennent par récurrence en utilisant les propriétés (ii) et (iii) du lemme 5.14. □

Démonstration du lemme 5.14. Sans perte de généralité, on suppose que $d = 1$. L'extension au cas $d \geq 2$ pour (iii) est immédiate en utilisant des dérivées partielles. Rappelons (cf. (4.25)) que si $d = 1$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Q_k(t)(x, dy) = i^k \xi^k e^{it\xi(y)} Q(x, dy).$$

Soit $0 < \alpha \leq 1$ tel que $\theta + \frac{k+\alpha}{\eta} \leq \theta'$. Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{B}_\theta$. Comme, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|e^{iu} - 1| \leq 2|u|^\alpha$, il vient

$$|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f| \leq Q\big(|\xi|^k \, |e^{i(t-t_0)\xi} - 1| \, |f|\big) \leq 2\, C^{\frac{k+\alpha}{\eta}} \, |t - t_0|^\alpha \, \|f\|_\theta Q(v^{\frac{k+\alpha}{\eta} + \theta}).$$

Or $Q(v^{\frac{k+\alpha}{\eta}+\theta}) \leq Q(v^{\theta'})$ et $Q(v^{\theta'}) \in \mathcal{B}_{\theta'}$ car, d'après l'inégalité de Jensen, $Q(v^{\theta'}) \leq (Qv)^{\theta'}$. D'où

$$\|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f\|_{\theta'} \leq 2\, C^{\frac{k+\alpha}{\eta}} \, |t - t_0|^\alpha \, \|f\|_\theta \, \|Q(v^{\theta'})\|_{\theta'}$$

et par conséquent on a

$$\|Q_k(t) - Q_k(t_0)\|_{\theta,\theta'} \leq 2\, C^{\frac{k+\alpha}{\eta}} \, \|Q(v^{\theta'})\|_{\theta'} \, |t - t_0|^\alpha.$$

On a montré que $Q_k \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert borné, alors Q_k est bien une application continue bornée de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}'_\theta)$. Ceci prouve l'assertion (i). Remarquons que l'on vient en fait de prouver que $Q_k \in \mathcal{C}_b^\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$. Donc le point (ii) s'obtient en considérant $\alpha = \tau$ dans la preuve précédente.

Pour établir (iii), considérons $0 < \alpha \leq 1$ tel que $\theta + \frac{k+1+\alpha}{\eta} \leq \theta'$. Soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{B}_\theta$. En remarquant que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|e^{iu} - 1 - iu| \leq 2|u|^{1+\alpha}$ et en procédant comme dans la preuve de (i), on obtient que

$$\|Q_k(t)f - Q_k(t_0)f - (t - t_0)Q_{k+1}(t_0)f\|_{\theta'} \leq 2\, C^{\frac{k+1+\alpha}{\eta}} |t - t_0|^{1+\alpha} \|f\|_\theta \, \|Q(v^{\theta'})\|_{\theta'}.$$

Par conséquent,

$$\|Q_k(t) - Q_k(t_0) - (t - t_0)Q_{k+1}(t_0)\|_{\theta,\theta'} \leq 2\, C^{\frac{k+1+\alpha}{\eta}} \|Q(v^{\theta'})\|_{\theta'} |t - t_0|^{1+\alpha}.$$

Donc $Q_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$ et $Q'_k = Q_{k+1}$. Enfin, d'après (i), Q_k et $Q'_k = Q_{k+1}$ sont des applications (continues) bornées de U dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$. Donc $Q_k \in \mathcal{C}_b^1(U, \mathcal{B}_\theta, \mathcal{B}_{\theta'})$. □

5.6.2 Application aux chaînes de Markov ρ-mélangeantes.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov ρ-mélangeante (cf. page 91). Rappelons que Q définit alors un opérateur fortement ergodique de $\mathbb{L}^2(\pi)$ (prop. 4.5). Commençons par présenter un énoncé simple dans le cas stationnaire ($\mu = \pi$).

Corollaire 5.5. *Supposons que $\xi : E \to \mathbb{R}^d$ soit nonlattice et qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que*

$$\pi\big(\|\xi\|^{m_d+\delta_0}\big) < +\infty. \tag{5.40}$$

Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}_\pi$, les propriétés (4.37) ou (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage) sont vérifiées avec la fonction $f = 1_E$.

Si l'on compare avec le cas indépendant, la condition de moment (5.40) est celle attendue à $\delta_0 > 0$ près. Le corollaire 5.5 est un cas particulier de l'énoncé suivant. On note comme d'habitude $\mathbb{L}^p(\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace des (classes de) fonctions complexes sur E dont la puissance p-ième du module est π-intégrable.

Corollaire 5.6. *Supposons que ξ vérifie les hypothèses du corollaire 5.5. Alors les propriétés (4.37) ou (4.38) ou (4.39) (selon la dimension et la condition de centrage) sont vérifiées sous les hypothèses suivantes sur la probabilité initiale μ et la fonction positive f mesurable sur E :*

- *$\mu = \phi\, d\pi$, où $\phi \in \mathbb{L}^{r'}(\pi)$ avec $r' > \frac{\eta}{\eta - m}$, où $\eta = m_d + \delta_0$ et $m \in]m_d, \eta[$,*
- *$f \in \mathbb{L}^s(\pi)$ avec $s > \frac{\eta}{\eta-m}$ et $\frac{\eta s}{\eta+ms} > \frac{r'}{r'-1}$.*

Etant donné $r' > \frac{\eta}{\eta-m}$, les deux conditions précédentes sur s sont remplies si s est suffisamment grand. Posons en effet $r = \frac{r'}{r'-1}$ (i. e. $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$). La condition précédente sur r' donne $\frac{1}{r'} < 1 - \frac{m}{\eta}$. On a ainsi $1 < r < \frac{\eta}{m}$, et comme $\frac{\eta s}{\eta+ms} \nearrow \frac{\eta}{m}$ quand $s \to +\infty$, on a $\frac{\eta s}{\eta+ms} > r$ si s est suffisamment grand.

Soient $p, q > 1$. On note, pour simplifier, $\|\cdot\|_p$ la norme usuelle de $\mathbb{L}^p(\pi)$ et $\|\cdot\|_{p,q}$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{L}^p(\pi), \mathbb{L}^q(\pi))$, subordonnée aux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$.

Démonstration du corollaire 5.6. La preuve est en tout point identique à celle du corollaire 5.4 en considérant ici la famille d'espaces $(\mathbb{L}^\theta(\pi))_{\theta\in[r,s]}$, avec s donné dans l'énoncé et $r = \frac{r'}{r'-1}$, et en appliquant les deux propositions ci-dessous. Notons que la condition (RS) s'obtient comme dans l'exemple précédent car les espaces $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ sont des treillis de Banach, voir également la fin de cette sous-section. □

Dans les deux propositions qui suivent, on suppose vérifiées les hypothèses du corollaire 5.6.

Proposition 5.7. *La famille d'espaces $(\mathbb{L}^\theta(\pi))_{\theta\in]1,+\infty[}$ satisfait l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ (cf page 143). En outre, pour tout $\theta \in]1, +\infty[$, les noyaux de Fourier $Q(t)$ vérifient sur $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ les hypothèses des propositions 5.2 et 5.3.*

Démonstration. Soit $\theta \in]1, +\infty[$. Dans l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$, seule la forte ergodicité de Q sur $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ est non triviale. Or rappelons que cette propriété est satisfaite par hypothèse sur $\mathbb{L}^2(\pi)$. Elle s'étend ainsi à tous les espaces $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ d'après le théorème de Riesz-Thorin (cf proposition 4.6). Démontrons que la famille $(Q(t))_{t\in[a,1]}$ vérifie les hypothèses des propositions 5.2 et 5.3 sur $I\!L^\theta(\pi)$, avec $\mathcal{B}_1 = I\!L^1(\pi)$. La propriété (H_0) est évidente, et (H_1) découle de la forte ergodicité de Q sur (le treillis de Banach) $I\!L^\theta(\pi)$ (cf. preuve de (5.39)). Soit maintenant θ' l'exposant conjugué de θ. Comme π est Q-invariante, on a, d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\pi(|Q(t)f - Q(t_0)f|) &\leq \pi\big(|e^{i\langle t,\xi\rangle} - e^{i\langle t_0,\xi\rangle}|\cdot|f|\big)\\ &\leq \|e^{i\langle t,\xi\rangle} - e^{i\langle t_0,\xi\rangle}\|_{\theta'}\|f\|_\theta\end{aligned}$$

Or, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\lim_{t\to t_0}\|e^{i\langle t,\xi\rangle} - e^{i\langle t_0,\xi\rangle}\|_{\theta'} = 0$. Donc on a $\lim_{t\to 0}\|Q(t)-Q\|_{\theta,1} = 0$, ce qui démontre (H_2). □

Proposition 5.8. *Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$ et soit m vérifiant la condition du corollaire 5.6. Alors $Q(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ relativement à la famille $(I\!L^\theta(\pi))_{\theta\in[r,s]}$, avec s (et r') définis dans l'énoncé du corollaire 5.6, et $r := \frac{r'}{r'-1}$.*

Démonstration. Rappelons qu'on a posé $\eta = m_d + \delta_0$, qu'on a par hypothèse $\pi\big(\|\xi\|^\eta\big) < +\infty$, et qu'on considère $m \in]m_d, \eta[$. Soit $\tau = m - \lfloor m\rfloor$. On rappelle également que $r' > \frac{\eta}{\eta-m}$, que $r := \frac{r'}{r'-1}$, et enfin que s est choisi tel que $s > \frac{\eta}{\eta-m}$ et $\frac{\eta s}{\eta+ms} > r$.
Remarquons que $r < s$. Posons alors $I := [r,s]$ et définissons, pour $\theta\in I$:

$$T_0(\theta) := \frac{\eta\theta}{\eta+\delta\theta},\qquad T_1(\theta) := \frac{\eta\theta}{\eta+\theta},\qquad T_\tau(\theta) := \frac{\eta\theta}{\eta+\tau\theta},$$

où $\delta > 0$ est choisi de sorte que $r = \frac{\eta s}{\eta+ms+\delta(\lfloor m\rfloor+1)s}$. Cette dernière relation s'écrit aussi $T_\tau\, T_1^{\lfloor m\rfloor}\, T_0^{\lfloor m\rfloor+1}(s) = r$.
L'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ de la section 5.4 est satisfaite comme indiqué dans l'énoncé. En effet, la condition **(0)** de l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ est évidente, et les conditions de régularité **(1), (2a)** et **(2b)** de $\mathcal{D}(m)$ sont vérifiées pour tout ouvert borné $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^d$ comme conséquence immédiate des trois lemmes suivants. □

Lemme 5.15. *Soient $u\in\{0,\tau\}$ et $\theta\in I$ tel que $T_u(\theta)\in I$. Alors*

$$Q(\cdot)\in\mathcal{C}_b^u\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(I\!L^\theta(\pi), I\!L^{T_u(\theta)}(\pi))\big).$$

Soient $k\in\{0,\cdots,\lfloor m\rfloor\}$ et $t\in\mathbb{R}^d$. Notons à nouveau $Q_k(t)$ l'un quelconque des opérateurs associés à un noyau du type

$$Q_{(p_1,\ldots,p_d)}(t)(x,dy) = i^k\xi_1^{p_1}(y)\cdots\xi_d^{p_d}(y)\,e^{i\langle t,\xi(y)\rangle}\,Q(x,dy),$$

avec $p_1+\cdots+p_d = k$. Si $d=1$, $Q_k(t)(x,dy) = i^k e^{it\xi(y)}\,Q(x,dy)$.

Lemme 5.16. *Soient $1\leq j\leq\lfloor m\rfloor$ et $\theta\in I$ tel que $T_1^j(\theta)\in I$. Alors*

$$Q(\cdot)\in\mathcal{C}^j\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(I\!L^\theta(\pi), I\!L^{T_1^j(\theta)}(\pi))\big)$$

avec, pour tout $k\in\{1,\cdots,j\}$, $Q^{(k)} = Q_k$.

Lemme 5.17. *Soit* $1 \leq j \leq \lfloor m \rfloor$ *et soit* $\theta \in I$ *tel que* $T_\tau T_1^j(\theta) \in I$. *Alors*

$$Q(\cdot) \in \mathcal{C}^{j+\tau}\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_\tau T_1^j(\theta)}(\pi))\big).$$

Pour établir ces trois lemmes, nous nous plaçons pour simplifier en dimension $d = 1$, l'extension au cas $d \geq 2$ étant immédiate en utilisant des dérivées partielles. Nous utiliserons plusieurs fois le résultat classique suivant :

Lemme 5.18. *Soient* p *et* p' *deux réels tels que* $1 < p' < p$. *Soient* $v \in \mathbb{L}^{\frac{pp'}{p-p'}}(\pi)$ *et* $w \in \mathbb{L}^p(\pi)$. *Alors* $vw \in \mathbb{L}^{p'}(\pi)$ *et on a*

$$\|vw\|_{p'} \leq \|v\|_{\frac{pp'}{p-p'}} \|w\|_p \tag{5.41}$$

Démonstration. Considérons $a = \frac{p}{p-p'} > 1$ et $b = \frac{p}{p'} > 1$. Comme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\int_E |v|^{p'}|w|^{p'} d\pi \leq \Big(\int_E |v|^{\frac{p'p}{p-p'}} d\pi\Big)^{\frac{p-p'}{p}} \Big(\int_E |w|^p d\pi\Big)^{\frac{p'}{p}}$$

ou encore

$$\Big(\int_E (|vw|)^{p'} d\pi\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \Big(\int_E |v|^{\frac{pp'}{p-p'}} d\pi\Big)^{\frac{p-p'}{pp'}} \Big(\int_E |w|^p d\pi\Big)^{\frac{1}{p}}$$

c'est-à-dire (5.41). □

Démonstration du lemme 5.15. Examinons le cas $u = \tau$. Le cas $u = 0$ s'étudie de même en remplaçant τ par le réel δ qui définit T_0. Comme, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|e^{ia} - 1| \leq |a|$ et $|e^{ia} - 1| \leq 2$, on a $|e^{ia} - 1| \leq 2^{1-\tau}|a|^\tau$. Rappelons que, π étant Q-invariante, pour tous $p \geq 1$ et g mesurable de E dans $\mathbb{R}^+$, $\pi((Qg)^p) \leq \pi(Q(g^p)) = \pi(g^p)$. Soient $(t,h) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{L}^\theta(\pi)$. On a :

$$\begin{aligned}
\|Q(t+h)f - Q(t)f\|_{T_u(\theta)} &= \|Q(t+h)f - Q(t)f\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+\tau\theta}} \\
&\leq \|Q(|e^{ih\xi} - 1||f|)\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+\tau\theta}} \\
&\leq \||e^{ih\xi} - 1||f|\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+\tau\theta}} \\
&\leq 2^{1-\tau}|h|^\tau \, \||\xi|^\tau f\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+\tau\theta}} \\
&\leq 2^{1-\tau}|h|^\tau \, \||\xi|^\tau\|_{\frac{\eta}{\tau}} \, \|f\|_\theta
\end{aligned}$$

en utilisant (5.41) avec $p = \theta$, $p' = \frac{\eta\theta}{\eta+\tau\theta}$, $v = |\xi|^\tau$ et $w = f$ car $\frac{pp'}{p-p'} = \frac{\eta}{\tau}$. D'où :

$$\|Q(t+h)f - Q(t)f\|_{\theta, T_u(\theta)} \leq 2^{1-\tau}\pi(|\xi|^\eta)^{\frac{\tau}{\eta}}|h|^\tau,$$

ce qui démontre la conclusion du lemme 5.15. □

Démonstration du lemme 5.16. Montrons que pour tout $k \in \{0, \cdots, j-1\}$, on a

$$Q_k \in \mathcal{C}_b^1\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_1^j(\theta)}(\pi))\big),$$

avec, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $Q'_k(t) = Q_{k+1}(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_1^j(\theta)}(\pi))$. Soient $t, h \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathbb{L}^\theta(\pi)$. Rappelons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|e^{ia} - 1 - ia| \leq 2|a| \min(1, |a|)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|Q_k(t+h)f - Q_k(t)f - hQ_{k+1}(t)f\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} &\leq \left\| Q\big(|\xi|^k \, |e^{ih\xi} - 1 - ih\xi| \, |f|\big) \right\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} \\
&\leq 2|h| \left\| |\xi|^{k+1} \min(1, |h| \, |\xi|) |f| \right\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} \\
&\leq 2|h| \left\| |\xi|^{k+1} \min(1, |h| \, |\xi|) \right\|_{\frac{\eta}{j}} \|f\|_\theta
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité précédente, on a utilisé la propriété (5.41) avec $p = \theta$, $p' = \frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}$, et avec $v = \xi^{k+1} \min(1, |h| \, |\xi|)$ et $w = f$ (noter que $\frac{pp'}{p-p'} = \frac{\eta}{j}$). Par conséquent

$$\|Q_k(t+h) - Q_k(t) - hQ_{k+1}(t)\|_{\theta, T_1^j(\theta)} \leq 2|h| \left\| |\xi|^{k+1} \min(1, |h| \, |\xi|) \right\|_{\frac{\eta}{j}}.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{h \to 0} \left\| |\xi|^{k+1} \min(1, |h| \, |\xi|) \right\|_{\frac{\eta}{j}} = 0$$

car $\lim_{h \to 0} |\xi|^{\frac{(k+1)\eta}{j}} \min(1, |h| \, |\xi|)^{\frac{\eta}{j}} = 0$ et comme $(k+1)\eta/j \leq \eta$, on a $|\xi|^{(k+1)\eta/j} \in \mathbb{L}^1(\pi)$. Donc l'application $t \mapsto Q_k(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_1^j(\theta)}(\pi))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q'_k(t) = Q_{k+1}(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_1^j(\theta)}(\pi))$.

Il reste à montrer que pour tout $k \in \{1, \cdots, j\}$, on a $Q_k \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_1^j(\theta)}(\pi))\big)$. Rappelons que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|e^{ia} - 1| \leq 2 \min(1, |a|)$. Soient $(t, h) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{L}^\theta(\pi)$. On a :

$$\begin{aligned}
\|Q_k(t+h)f - Q_k(t)f\|_{T_1^j(\theta)} &= \|Q_k(t+h)f - Q_k(t)f\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} \\
&\leq \|Q_k(|e^{ih\xi} - 1||f|)\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} \\
&\leq \||\xi|^k |e^{ih\xi} - 1||f|\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} \\
&\leq 2 \left\| |\xi|^k \min(1, |h||\xi|) f \right\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}} \\
&\leq 2 \left\| |\xi|^k \min(1, |h||\xi|) \right\|_{\frac{\eta}{j}} \|f\|_\theta
\end{aligned}$$

en utilisant (5.41) avec $p = \theta$, $p' = \frac{\eta\theta}{\eta+j\theta}$ ($\frac{pp'}{p-p'} = \frac{\eta}{\tau}$), $v = |\xi|^k \min(1, |h||\xi|)$ et $w = f$. Par conséquent

$$\|Q_k(t+h) - Q_k(t)\|_{\theta, T_1^j(\theta)} \leq 2 \left\| |\xi|^k \min(1, |h| \, |\xi|) \right\|_{\frac{\eta}{j}}.$$

Enfin, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue comme précédemment, on obtient que le terme de droite dans l'inégalité précédente tend vers 0 quand $h \to 0$, ce qui démontre la propriété annoncée. $\square$

Démonstration du lemme 5.17. Soit $\theta \in I$ tel que $T_\tau T_1^j(\theta) \in I$. Comme $T_1^j(\theta) \in I$, on a $Q(\cdot) \in \mathcal{C}^j\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_1^j(\theta)}(\pi))\big)$ d'après le lemme 5.16. A fortiori nous avons donc aussi

$$Q(\cdot) \in \mathcal{C}^j\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_\tau T_1^j(\theta)}(\pi))\big) \ \text{ et } \ Q^{(j)} = Q_j \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_\tau T_1^j(\theta)}(\pi)).$$

Montrons que $Q_j \in \mathcal{C}^\tau\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi), \mathbb{L}^{T_\tau T_1^j(\theta)}(\pi))\big)$ en procédant comme dans la preuve du lemme 5.15. Soient $(t,h) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{L}^\theta(\pi)$. On a :

$$\begin{aligned}
\|Q_j(t+h)f - Q_j(t)f\|_{T_\tau T_1^j(\theta)} &= \|Q_j(t+h)f - Q(t)f\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+(j+\tau)\theta}} \\
&\leq \|Q(|\xi|^j|e^{ih\xi}-1||f|)\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+(j+\tau)\theta}} \\
&\leq \||\xi|^j|e^{ih\xi}-1||f|\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+(j+\tau)\theta}} \\
&\leq 2^{1-\tau}|h|^\tau \left\||\xi|^{j+\tau}f\right\|_{\frac{\eta\theta}{\eta+(j+\tau)\theta}} \\
&\leq 2^{1-\tau}|h|^\tau \left\||\xi|^{j+\tau}\right\|_{\frac{\eta}{j+\tau}} \|f\|_\theta
\end{aligned}$$

en utilisant (5.41) avec $p = \theta$, $p' = \frac{\eta\theta}{\eta+(j+\tau)\theta}$ $\big(\frac{pp'}{p-p'} = \frac{\eta}{j+\tau}\big)$, $v = |\xi|^{j+\tau}$ et $w = f$. D'où :

$$\|Q_j(t+h)f - Q_j(t)f\|_{\theta, T_\tau T_1^j(\theta)} \leq 2^{1-\tau}\pi(|\xi|^\eta)^{\frac{j+\tau}{\eta}}|h|^\tau,$$

ce qui démontre la conclusion souhaitée. □

Complément sur l'hypothèse (RS).
Pour cet exemple (comme dans la sous-section précédente), l'hypothèse (RS) (p. 133) est obtenue en utilisant le fait que $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ est un treillis de Banach et que Q est fortement ergodique sur $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ (cf remarque 5.4). Rappelons que ce résultat découle de [67], qui est basé sur des arguments assez abstraits d'opérateurs positifs sur des treillis de Banach. Nous nous proposons ici, dans un cas particulier, de donner une preuve plus simple de la propriété (RS).

Soit $\theta \in]1, +\infty[$ et $t \in \mathbb{R}^d$. Rappelons que l'opérateur de Fourier $Q(t)$ est un opérateur contractant de $\mathbb{L}^\theta(\pi)$, donc de rayon spectral inférieur ou égal à 1. Supposons que l'opérateur de transition Q, considéré comme élément de $\mathbb{L}^\theta(\pi)$, soit tel que :

$$\exists \hat\kappa \in [0,1[, \ \forall n \geq 1, \ \forall f \in \mathbb{L}^\theta(\pi), \ \ \|Q^n f - \pi(f)1_E\|_\theta \leq \hat\kappa^n \|f\|_\theta. \tag{5.42}$$

Autrement dit, on suppose que Q est fortement ergodique sur $\mathbb{L}^\theta(\pi)$, et qu'en outre la constante C dans la définition (5.36) de forte ergodicité est inférieure ou égale à 1.

Proposition 5.9. *Sous la condition précédente, les valeurs spectrales de module 1 de $Q(t)$ sont des valeurs propres de $Q(t)$.*

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème 4.1 (page 114) avec :

$$(\mathcal{B}, \|\cdot\|) = (\mathbb{L}^\theta(\pi), \|\cdot\|_\theta), \quad (\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0) = \big(\mathbb{L}^1(\pi), |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle}\cdot)|\big) \quad \text{et} \quad T = Q(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^\theta(\pi)).$$

Il est immédiat que $|\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle}\cdot)|$ est une semi-norme sur $\mathbb{L}^1(\pi)$ et que $(\mathbb{L}^\theta(\pi), \|\cdot\|_\theta)$ s'injecte continûment dans $\big(\mathbb{L}^1(\pi), |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle}\cdot)|\big)$ car, pour tout $f \in \mathbb{L}^\theta(\pi)$,

$$|\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle}f)| \leq \pi(|f|) \leq \|f\|_\theta.$$

Vérifions que l'injection canonique de $(\mathbb{L}^\theta(\pi), \|\cdot\|_\theta)$ dans $\big(\mathbb{L}^1(\pi), |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle}\cdot)|\big)$ est compacte. Soit θ' l'exposant conjugué de θ. Soit (f_n) une suite bornée de $(\mathbb{L}^\theta(\pi), \|\cdot\|_\theta)$. Comme tout sous-ensemble borné de $\mathbb{L}^\theta(\pi)$ est faiblement relativement compact, il existe $f \in \mathbb{L}^\theta(\pi)$ tel que, quitte à considérer une sous-suite de (f_n), on ait : $\forall g \in \mathbb{L}^{\theta'}(\pi)$, $\lim_{n\to+\infty} \pi(f_n g) = \pi(fg)$. En particulier, pour $g = e^{i\langle t,\xi\rangle} \in \mathbb{L}^{\theta'}(\pi)$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle} f_n)| = |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle} f)|$. Enfin, en considérant $n = 1$ dans (5.42), on a

$$\begin{aligned}\|Q(t)f\|_\theta := \|Q(e^{i\langle t,\xi\rangle} f)\|_\theta &\leq \kappa\|e^{i\langle t,\xi\rangle} f\|_\theta + |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle} f)| \\ &\leq \kappa\|f\|_\theta + |\pi(e^{i\langle t,\xi\rangle} f)|\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure avec le théorème 4.1. □

5.7 Un théorème de renouvellement unidimensionnel.

Dans cette section, nous démontrons, sous des hypothèses légèrement simplifiées et généralisées, le théorème de renouvellement unidimensionnel présenté dans la note [31]. Cette étude repose sur le résultat de la sous-section suivante, qui complète la proposition 5.2 lorsque l'hypothèse de continuité (H2) est renforcée par une condition Lipschitz.

5.7.1 Raffinement de la proposition 5.2 (vitesse de convergence).

Nous conservons donc ici les hypothèses et notations de la proposition 5.2, à savoir : $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable, Q est une probabilité de transition sur $(E, \mathcal{E})$ admettant une probabilité invariante, notée π, $\mathcal{B}$ est un espace de Banach vérifiant l'hypothèse **(B)** définie au chapitre 4 (page 84), I_0 est un voisinage ouvert de $t = 0$ dans $\mathbb{R}^d$, $(Q(t))_{t\in I_0}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ tels que $Q(0) = Q$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in \mathcal{B},\ \pi(|Q(t)f|) \leq \pi(|f|). \tag{5.43}$$

Enfin nous supposons que Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$ (cf. (5.36)).

Proposition 5.10. *Supposons qu'il existe un voisinage ouvert I de 0 dans $\mathbb{R}^d$ de sorte que la famille $(Q(t))_{t\in I}$ vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème 5.1 avec $t_0 = 0$, $\kappa_1 := \kappa_1(0) < 1$, $M_n(0) = 1$ et $\mathcal{B}_1 = \mathbb{L}^1(\pi)$. Supposons de plus qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall (t,t') \in I^2,\ \|Q(t) - Q(t')\|_{\mathcal{B},\mathbb{L}^1(\pi)} \leq C\|t - t'\|. \tag{5.44}$$

Soient $\kappa \in]\max(\hat\kappa, \kappa_1), 1[$ et $\tau(\kappa) := \frac{\ln\kappa_1 - \ln\kappa}{\ln\kappa_1}$. Alors il existe un voisinage $J \subset I$ de 0 dans $\mathbb{R}^d$, et des applications λ, v, ϕ et N à valeurs respectivement dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ tels que l'on ait, pour $t \in J$:

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{B},\ Q(t)^n f = \lambda(t)^n \phi(t)(f) v(t) + N(t)^n f, \tag{5.45}$$

avec de plus les propriétés suivantes :

(a) *$\lambda(0) = 1$, $v(0) = 1_E$, $\pi(v(t)) = 1$ et $\phi(0) = \pi$.*

(b) *$t \mapsto \|v(t)\|$ est majorée sur J et il existe $C' > 0$ tel que :*

  (b1) *$\forall t \in J$, $\pi(|v(t) - 1_E|) \leq C'\|t\|^\tau$*

  (b2) *$\forall t \in J$, $\forall f \in \mathcal{B}$, $|\phi(t)(f) - \pi(f)| \leq C'\|t\|^\tau \|f\|$*

  (b3) *$\forall t \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|N(t)^n\| \leq C'\kappa^n$*

(c) *λ et $L(\cdot)$ sont continues sur J.*

Démonstration. On conserve les notations introduites dans l'énoncé de la proposition 5.2. En utilisant la propriété (5.44) et la proposition 5.1, on obtient aisément le raffinement suivant du lemme 5.5 : pour tout $t_0 \in I$, il existe un voisinage ouvert $V(t_0)$ de $t_0 \subset J$ et $K > 0$ tels que

$$\forall t \in V(t_0), \forall f \in \mathcal{B}, \pi(|\Pi(t)f - \Pi(t_0)(f)|) \leq K\|t - t_0\|^\tau \|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{5.46}$$

Considérons le réel R_κ de la proposition 5.2. Posons $J = B(0, R_\kappa)$ et, pour tout $t \in J$,

$$v(t) := \frac{\Pi(t)1_E}{\pi(\Pi(t)1_E)}.$$

Comme $rg\Pi(t) = 1$, il existe un unique élément $\phi(t) \in \mathcal{B}'$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \Pi(t)f = \phi(t)(f)\, v(t).$$

D'après la remarque 5.2, on a $Q(t)v(t) = \lambda(t)v(t)$. Par construction, $v(0) = 1_E$, $\pi(v(t)) = 1$ et $\phi(0) = \pi$ car $\Pi = \Pi(0) = \pi(\cdot)1_E$. L'assertion **(a)** est ainsi démontrée. En outre, $t \mapsto \|v(t)\|_{\mathcal{B}}$ est bornée sur J d'après le lemme 5.6 car $t \mapsto \pi(|v(t)|)$ est bornée sur J d'après le lemme 5.5. Posons maintenant $\alpha(t) = \pi(\Pi(t)1_E)$. En considérant $t_0 = 0$ et $f = 1_E$ dans (5.46), on a

$$|\alpha(t) - 1| = |\pi(\Pi(t)1_E - 1_E)| \leq \pi(|\Pi(t)1_E - \Pi 1_E|) \leq K\|t\|^\tau \|1_E\|_{\mathcal{B}}$$

et en utilisant les égalités $v(t) - 1_E = (\alpha(t)v(t) - 1_E) + (1 - \alpha(t))v(t)$ et $\alpha(t)v(t) = \Pi(t)1_E$, on obtient

$$\begin{aligned} \pi(|v(t) - 1_E|) &\leq \pi(|\Pi(t)1_E - 1_E|) + |\alpha(t) - 1|\, \pi(|v(t)|) \\ &\leq K\|1_E\|_{\mathcal{B}}(1 + \pi(|v(t)|))\, \|t\|^\tau \\ &\leq C'\|t\|^\tau \end{aligned}$$

car $t \mapsto \pi(|v(t)|)$ est bornée sur J. D'où **(b1)** et **(b2)** s'obtient immédiatement avec (5.46) car $\phi(t)f - \pi(f) = \pi(\Pi(t)f) - \pi(\Pi(0)f)$. La propriété **(b3)** correspond à la propriété (5.21) déjà mentionnée.

Il reste à établir la continuité de λ et ϕ sur J. Soit $t_0 \in I$. On montre comme dans le cas $t_0 = 0$ que $\forall t \in V(t_0)$, on a :

$$\pi(|v(t) - v(t_0)|) = O(\|t - t_0\|).$$

En utilisant l'égalité

$$\lambda(t) - \lambda(t_0) = \pi((Q(t) - Q(t_0))v(t)) + \pi(Q(t_0)(v(t) - v(t_0)))$$

et la propriété (5.44), on obtient que $\lambda(\cdot)$ est localement τ-höldérienne sur I. Donc $\phi(\cdot)$ est également localement τ-höldérienne sur I d'après (5.46) car $\phi(t) = \pi(\Pi(t)f)$. D'où **(c)**. $\square$

5.7.2 Théorème de renouvellement (cas stationnaire).

Dans cette sous-section et dans la suivante, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, d'espace d'états $(E,\mathcal{E})$ quelconque, de probabilité de transition $Q(x,dy)$, de probabilité Q-invariante π, et de loi initiale μ.

Soit ψ une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ ayant les propriétés suivantes :

$\psi(0)=0$, ψ est dérivable en 0, $\psi'(0)>0$, ψ est strictement croissante et non majorée sur $\mathbb{R}^+$ et l'ensemble

$$\Big\{e>0,\ \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\psi(t)^e}<+\infty\Big\}$$

est un intervalle non vide dont la borne inférieure est notée $i(\psi)$.

Les exemples classiques de telles fonctions sont $\psi(t)=t$, avec $i(\psi)=0$, $\psi(t)=\ln(1+t)$, avec $i(\psi)=1$.

Fixons $\varepsilon>0$ et considérons une fonction ξ mesurable sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\pi\left(|\xi|\,\psi\big(|\xi|\big)^{i(\psi)+\varepsilon}\right)<\ +\infty. \tag{5.47}$$

Remarquons que cette condition de moment sur ξ implique que $\xi\in\mathbb{L}^1(\pi)$. Supposons de plus que $\pi(\xi)>0$ et considérons la fonctionnelle additive $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi(X_k).$$

Soit $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ un espace de Banach vérifiant l'hypothèse (**B**). On suppose que Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}$ (cf. (5.36)).

Les noyaux de Fourier associés à Q et ξ, notés $Q_\xi(t)$ (ou simplement $Q(t)$) sont définis comme précédemment, à savoir : $\forall t\in\mathbb{R}$, $Q(t)(x,dy):=e^{it\xi(y)}Q(x,dy)$. On suppose que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $Q(t)$ opère continûment sur $\mathcal{B}$.

Comme π est Q-invariante, il est facile de voir que la famille $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie (5.43). Soit I un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Introduisons maintenant trois hypothèses supplémentaires :

Hypothèse (K1) : *Il existe $\kappa_1\in[0,1[$ et $C_1>0$ tels que :*

$$\forall n\geq 1,\ \forall t\in I,\ \forall f\in\mathcal{B},\quad \|Q(t)^nf\|\leq\kappa_1^n\|f\|+C_1\pi(|f|).$$

Hypothèse (K2) : *Il existe $K>0$ et $\iota\in]i(\psi),i(\psi)+\varepsilon[$ tels que :*

$$\forall M>0,\ \forall t\in I,\ \forall f\in\mathcal{B},\quad \pi\big(1_{[|\xi|\geq M]}\,\big|(e^{it\xi}-1)f\big|\big)\leq\frac{K}{\psi(M)^\iota}|t|\,\|f\|.$$

Hypothèse (K3) : *Pour tout compact K de $\mathbb{R}^*$, il existe $\rho\in]0,1[$ et $c\in\mathbb{R}^{+*}$ tels que*

$$\forall n\geq 1,\ \forall t\in K,\quad \|Q(t)^n\|\leq c\rho^n.$$

L'hypothèse (K2) implique la propriété suivante :

$$\exists D > 0,\ \forall f \in \mathcal{B}, \forall (t,t') \in I^2,\quad \pi(|Q(t)f - Q(t')f|) \leq D|t-t'|\|f\|. \tag{5.48}$$

En effet, soit $f \in \mathcal{B}$, $(t,t') \in I^2$ et $M > 0$. En utilisant (K2) et l'inégalité $|e^{iu\xi} - 1| \leq |u||\xi|$, $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\pi(|e^{it\xi} f - e^{it'\xi} f|) = \pi(|(e^{i(t-t')\xi} - 1)f|) \leq M|t-t'|\pi(|\ f\ |) + \frac{K}{\psi(M)^\iota}|t-t'|\|f\|. \tag{5.49}$$

Or $\pi \in \mathcal{B}'$, donc il existe $D' > 0$ telle que $\forall f \in \mathcal{B}$, $\pi(|f|) \leq D'\|f\|$. Par conséquent, il existe $D > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall (t,t') \in I^2,\quad \pi(|e^{it\xi} f - e^{it'\xi} f|) \leq D|t-t'|\|f\|.$$

Comme $|Q(t)f - Q(t')f| = |Q((e^{it\xi} - e^{it'\xi})f)| \leq Q(|(e^{it\xi} - e^{it'\xi})f|)$, la propriété (5.48) résulte de l'invariance de π. En d'autres termes, $t \mapsto Q(t)$ est continue en 0, lorsque $Q(t)$ est considéré comme opérateur de $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ dans $(\mathcal{B}, \pi(|\cdot|))$. On reconnait l'hypothèse (5.44) de la proposition 5.10 (page 155).

Par conséquent, sous les hypothèses ci-dessus, la famille $(Q(t))_{t\in I}$ vérifie en particulier les hypothèses de la proposition 5.10. On notera enfin que l'hypothèse **(K3)** correspond à l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA) (cas $d = 1$), dont l'étude et les réductions sont présentées dans la section 5.3.

Dans le théorème suivant, on suppose $\mu = \pi$.

Théorème 5.2. `[Cas stationnaire.]` *Supposons que les hypothèses* (K1)*,* (K2) *et* (K3) *soient vérifiées par la famille* $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}}$. *Soit* $f \in \mathcal{B}$*, positive telle que* $\pi(f) > 0$. *Alors, pour tout* $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, on a :*

$$\lim_{a\to-\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\pi[f(X_n)\, g(S_n - a)] = 0 \ \ et \ \lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\pi[f(X_n)\, g(S_n - a)] = \frac{\pi(f)}{\pi(\xi)} \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Démonstration. En utilisant les conclusions de la proposition 5.10, nous allons vérifier que les hypothèses du théorème 2.3 sont satisfaites avec $v_0 = \pi(\xi)$ et $L(0) = \pi(f)$.

Soit $f \in \mathcal{B}$, positive. Par le lemme 4.3 et (5.45), on a, pour tous $t \in J$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_\pi[f(X_n)e^{itS_n}] = \pi(Q(t)^n f) = \lambda(t)^n \phi(t)(f) + \pi(N(t)^n f) \tag{5.50}$$

car $\pi(v(t)) = 1$, d'où

$$L(t) = \phi(t)(f) \text{ et } R_n(t) = \pi(N(t)^n f).$$

La preuve ci-dessous est organisée en quatre parties : l'étude de $\lambda(\cdot)$ (la plus technique), puis celle de $L(\cdot)$ et de la convergence uniforme sur J de la série $\sum_{n\geq 1} R_n(t)$, et enfin l'étude de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^*$ de la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)\, e^{itS_n}]$.

• *Propriétés de* $\lambda(\cdot)$.
La proposition 5.10 nous donne directement $\lambda(0) = 1$ et λ est continue sur J (cf. **(a)** et **(c)**). Montrons maintenant que λ est dérivable en 0 avec $\lambda'(0) = i\pi(\xi)$ et que la condition intégrale sur λ du théorème 2.3 est satisfaite.

Proposition 5.11. *On a :*

$$\lambda(t) = 1 + i\pi(\xi)t + o(t), \text{ quand } t \to 0 \tag{5.51}$$

et

$$\int_J \frac{| \lambda(t) - 1 - i\pi(\xi)t |}{t^2} dt \, < \, +\infty. \tag{5.52}$$

Preuve. Soit $t \in J$. Comme $\lambda(t)v(t) = Q(t)v(t) = Q(e^{it\xi}v(t))$ et $\pi(v(t)) = 1$, on a, par Q-invariance de π :

$$\lambda(t) = \pi(e^{it\xi}v(t)) = \pi(e^{it\xi}) + \pi\big(e^{it\xi}(v(t) - 1_E)\big) = \pi(e^{it\xi}\big) + \pi\big((e^{it\xi} - 1)(v(t) - 1_E)\big).$$

Comme $\xi \in \mathbb{L}^1(\pi)$, $\pi(e^{it\xi}) = 1 + i\pi(\xi)t + o(t)$. De plus, en utilisant (5.49), avec $t' = 0$, $f = v(t) - 1_E$ et $M = |t|^{-\frac{\tau}{2}}$, $t \neq 0$, et le résultat **(b1)** de la proposition 5.10, on obtient :

$$\pi\big(|(e^{it\xi} - 1)(v(t) - 1_E)|\big) \leq C'|t|^{1+\frac{\tau}{2}} + \frac{K}{\psi(|t|^{-\frac{\tau}{2}})^\iota} |t| \|v(t) - 1_E\|.$$

et comme $\|v(\cdot)\|$ est majorée sur J d'après la proposition 5.10, il existe donc $C'' > 0$ tel que

$$\pi\big(|(e^{it\xi} - 1)(v(t) - 1_E)|\big) \leq C'|t|^{1+\frac{\tau}{2}} + \frac{C''}{\psi(|t|^{-\frac{\tau}{2}})^\iota} |t|. \tag{5.53}$$

D'où (5.51) car $\lim_{t\to 0}(\psi(|t|^{-\frac{\tau}{2}})^\iota)^{-1} = 0$ puisque, par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$. L'inégalité (5.53) montre en outre que si $\alpha > 0$ est tel que $[-\alpha, \alpha] \subset J$,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\big|\pi\big((e^{it\xi} - 1)(v(t) - 1_E)\big)\big|}{t^2} dt \, < \, +\infty.$$

En effet, $\int_0^\alpha \frac{dt}{t^{1-\frac{\tau}{2}}}$ converge, et comme $\iota > i(\psi)$, le changement de variable $u = t^{-\frac{\tau}{2}}$ conduit à :

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{t\,\psi(t^{-\frac{\tau}{2}})^\iota} = \frac{2}{\tau} \int_{\alpha^{-\frac{\tau}{2}}}^{+\infty} \frac{du}{u\,\psi(u)^\iota} < +\infty.$$

Il reste à établir la convergence de l'intégrale $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|\pi(e^{it\xi})-1-i\pi(\xi)t|}{t^2} dt$. Posons, pour $\beta > 0$ et $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\theta_\beta(t) := \max\big\{|t|^{\frac{1}{2}}, \psi\big(|t|^{-\frac{1}{2}}\big)^{-\beta}\big\}.$$

Lemme 5.19. *Il existe $K > 0$ tel que :*

$$\forall t \in [-1, 1] \setminus \{0\},\ \forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^{itu} - 1 - itu| \leq K|t|\,\theta_\beta(t)\,|u|\,\big(1 + \psi(|u|)\big)^\beta.$$

Admettons pour le moment le résultat du lemme 5.19. Fixons β égal à $i(\psi) + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est le réel de l'hypothèse de moment (5.47) sur ξ. On vérifie facilement que ce choix de β nous assure la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\theta_\beta(t)}{t} dt$. D'après le lemme 5.19, on a :

$$\pi(|e^{it\xi} - 1_E - it\xi|) \leq K|t|\,\theta_\beta(t)\,\pi\big(|\xi|\,(1 + \psi(|\xi|))^{i(\psi)+\varepsilon}\big).$$

Cette inégalité et (5.47) donnent immédiatement l'existence de $\int_0^\alpha t^{-2}\,\pi(|e^{it\xi}-1_E-it\xi|)\,dt$ et a fortiori de $\int_{-\alpha}^\alpha t^{-2}\ \mid \pi(e^{it\xi})-1-i\pi(\xi)t\mid\ dt$. La proposition 5.11 est démontrée. □

Preuve du lemme 5.19. L'inégalité cherchée s'obtient en distinguant deux cas :
- *1er cas :* $\sqrt{|t|}|u|\le 1$. On sait que : $\forall a\in\mathbb{R}$, $|e^{ia}-1-ia|\le 2^{-1}a^2$. On a donc en particulier

$$|e^{itu}-1-itu|\le 2^{-1}\,|t|^{\frac{3}{2}}\,|u|\,(\sqrt{|t|}|u|).$$

Supposons tout d'abord $\beta\ge 1$. Comme il existe $D'>0$ tel que $\forall x\in[0,1]$, $x\le D'\psi(x)$, on a

$$|e^{itu}-1-itu|\le 2^{-1}\,D'\,|t|^{\frac{3}{2}}\,|u|\,\psi\big(\sqrt{|t|}|u|\big).$$

Comme $|t|\le 1$, la croissance de ψ nous donne :

$$|e^{itu}-1-itu|\ \le\ 2^{-1}\,D'\,|t|^{\frac{3}{2}}\,|u|\,\psi\big(|u|\big)\ \le\ 2^{-1}\,D'\ |t|^{\frac{3}{2}}\,|u|\,\big(1+\psi(|u|)\big)^{\beta}.$$

Si $0<\beta<1$, on définit $D''>0$ tel que : $\forall x\in[0,1]$, $x\le D''\psi^\beta(x)$, et l'on a de même :

$$|e^{itu}-1-itu|\ \le\ 2^{-1}\,D''\,|t|^{\frac{3}{2}}\,|u|\,\psi^{\beta}\big(\sqrt{|t|}|u|\big)\ \le\ 2^{-1}\,D''\,|t|^{\frac{3}{2}}\,|u|\,\big(1+\psi(|u|)\big)^{\beta}.$$

- *2d cas :* $\sqrt{|t|}|u|\ge 1$. Comme pour tout $a\in\mathbb{R}$, $|e^{ia}-1-ia|\le 2|a|$, on obtient par croissance de ψ :

$$|e^{itu}-1-itu|\ \le\ 2\,|t|\,|u|\ \le\ 2\,|t|\,|u|\,\frac{\psi(|u|)^\beta}{\psi(\frac{1}{\sqrt{|t|}})^\beta},$$

ce qui donne l'inégalité voulue. □

• *Propriétés de $L(\cdot)$.*
Rappelons que $L(t)=\phi(t)(f)$. La proposition 5.10 nous donne directement $L(0)=\phi(0)(f)=\pi(f)$ et L continue sur J (cf. **(a)** et **(c)**). De plus, d'après **(b2)**, $t\mapsto\frac{L(t)-L(0)}{t}$ est intégrable sur J car $\int_0^\alpha\frac{dt}{t^{1-\tau}}$ converge.

• *Convergence uniforme sur J de la série $\sum_{n\ge1}R_n(t)$.*
Rappelons que $R_n(t)=\pi(N(t)^n f)$. On vient de prouver que λ et L sont continues sur J. Comme $t\mapsto\mathbb{E}[f(X_n)e^{itS_n}]$ est aussi continue sur J (par convergence dominée), $t\mapsto R_n(t)$ est continue sur J d'après (5.50). Et comme $\pi\in\mathcal{B}'$, la série de fonctions $\sum_{n\ge1}R_n(t)$ converge normalement donc uniformément sur J d'après la propriété **(b3)** de la proposition 5.10.

• *Convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^*$ de la série $\sum_{n\ge1}\mathbb{E}\big[f(X_n)\,e^{itS_n}\big]$.* Rappelons que d'après le lemme 4.3, $\mathbb{E}\big[f(X_n)\,e^{itS_n}\big]=\pi(Q(t)^n f)$. Comme $\pi\in\mathcal{B}'$, la convergence uniforme souhaitée résulte immédiatement de l'hypothèse de non-arithméticité $(K3)$ et de la continuité de $t\mapsto\mathbb{E}\big[f(X_n)\,e^{itS_n}\big]$.

La démonstration du théorème 5.2 est complète. □

5.7.3 Théorème de renouvellement (cas non-stationnaire).

Dans cette sous-section, on conserve les notations et hypothèses (sauf $\mu=\pi$) de la sous-section précédente. On introduit en outre une nouvelle hypothèse sur la famille $(Q(t))_{t\in I}$:

Hypothèse (K4) : *Il existe un espace de Banach $(\mathcal{B}^*,\|\cdot\|_{\mathcal{B}^*})$ avec $\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{B}^*$ tel que* *(a)* $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^*)$ *et 1 est une valeur propre isolé du spectre de* $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^*)$*,*

(b) $\lim_{t\to 0} \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*} = 0$*, et* $t \mapsto \frac{1}{t}\|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}$ *est intégrable en 0.*

Supposons que la loi μ de X_0 soit dans $\mathcal{B}'$. Remarquons que, pour tous $f \in \mathcal{B}$, positive, et $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_n)] = \mu(Q^n f) < +\infty$$

Théorème 5.3. [Cas non-stationnaire]
Supposons que les hypothèses $(K1)$, $(K2)$, $(K3)$ *et* $(K4)$ *soient vérifiées par la famille des opérateurs de Forier* $(Q(t))_{t\in\mathbb{R}}$*. Soit* $\mu \in \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}^{*\prime}$*. Soit* $f \in \mathcal{B}$*, positive telle que* $\pi(f) > 0$*. Alors, pour tout* $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, on a :*

$$\lim_{a\to-\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu[f(X_n)\, g(S_n - a)] = 0 \ \text{ et } \ \lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_\mu[f(X_n)\, g(S_n - a)] = \frac{\pi(f)}{\pi(\xi)} \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Démonstration. On procède comme dans la preuve du théorème 5.2 en utilisant les conclusions de la proposition 5.10. Soit $f \in \mathcal{B}$, positive. Par le lemme 4.3 et (5.45), on a, pour tous $t \in J$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_n)e^{itS_n}] = \mu(Q(t)^n f) = \lambda(t)^n \phi(t)(f)\mu(v(t)) + \mu(N(t)^n f) \tag{5.54}$$

donc ici

$$L(t) = \phi(t)(f)\mu(v(t)) \text{ et } R_n(t) = \mu(N(t)^n f).$$

La difficulté principale de cette preuve consiste à montrer que $L(\cdot)$ est continue en 0 et que

$$\int_J \frac{|L(t) - L(0)|}{|t|} dt < +\infty.$$

Concernant la continuité en 0 de L, on sait déjà que $t \mapsto \phi(t)(f) = \pi(\Pi(t)(f))$ est continue en 0 (cf. Preuve du théorème 5.2). Il suffit donc de prouver que $t \mapsto \mu(v(t))$ est continue en 0. Choisissons $\kappa \in]\max(\hat{\kappa}, \kappa_1), 1[$ de sorte que le disque de centre 1 et de rayon $\frac{1-\kappa}{2}$ ne contienne pas de valeur spectrale de $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^*)$. Soit Γ_1 le cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1-\kappa}{2}$. On sait (cf. 5.17) que

$$\mathcal{S}_\kappa := \sup\left\{\|(zId - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}^*},\ t \in J,\ z \in \Gamma_1(\kappa)\right\} < +\infty.$$

Posons $S := \sup\left\{\|(zId - Q))^{-1}\|, z \in \Gamma_1(\kappa)\right\} < +\infty$. L'égalité

$$v(t) - 1_E = \Pi(t)1_E - \Pi(0)1_E = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_1} \left((zId - Q(t))^{-1} - (zId - Q)^{-1}\right) dz$$

et la relation

$$(zId - Q(t))^{-1} - (zId - Q)^{-1} = (zId - Q)(Q(t) - Q)(zId - Q(t))^{-1}$$

nous donnent :

$$\|v(t) - 1\|_{\mathcal{B}^*} \leq \frac{1-\kappa}{2}\ \mathcal{S}_\kappa S \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathcal{B}^*)}. \tag{5.55}$$

Donc $\lim_{t\to 0} \|v(t) - 1\|_{\mathcal{B}^*} = 0$ et comme $\mu \in \mathcal{B}^{*\prime}$, $t \mapsto \mu(v(t))$ est continue en 0. En outre, on a

$$L(t) - L(0) = \phi(t)(f)\mu(v(t)) - \phi(0)(f) = \phi(t)(f)\mu(v(t) - 1_E) + \phi(t)(f) - \phi(0)(f).$$

On a déjà observé (cf. Preuve du théorème 5.2) que $\int_J |t|^{-1} |\phi(t)f - \phi(0)f| \, dt < +\infty$. Comme $t \mapsto \phi(t)(f)$ est bornée sur J (car continue en 0), il suffit donc de prouver que $\int_J |t|^{-1} \mu(|v(t) - 1_E|) \, dt < +\infty$ ou encore que $\int_J |t|^{-1} \|v(t) - 1_E\|_{\mathcal{B}^*} \, dt < +\infty$ car $\mu \in \mathcal{B}^{*\prime}$. Mais cette dernière condition est satisfaite grâce à (5.55). Les autres propriétés requises pour $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[f(X_n)e^{itS_n}]$ s'établissent comme dans la preuve du théorème 5.2. □

5.8 Extension sous une hypothèse de type semi-groupe.

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Dans cette section, $((X_n, S_n))_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^d$, où $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d'espace d'états E et de probabilité de transition $Q(x, dy)$. Soit $x \in E$. On note $\mathbb{P}_x$ la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ (et $\mathbb{E}_x$ l'espérance associée $\mathbb{E}$) lorsque la loi de X_0 est la masse de Dirac en x.

Pour toute fonction complexe f bornée sur E, et pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^d$, posons :

$$\big(Q_n(t)f\big)(x) := \mathbb{E}_x\big[f(X_n)\, e^{i\,\langle t, S_n\rangle}\big] \quad (x \in E). \tag{5.56}$$

Remarquons que $Q_1(0) = Q$. Introduisons la condition suivante :

Condition ($\mathcal{G}$). *Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $(Q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est un semi-groupe, i.e :*

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad Q_{m+n}(t) = Q_m(t) \circ Q_n(t).$$

Sous la condition ($\mathcal{G}$), on a en particulier $Q_n(t) = Q(t)^n$ avec $Q(t) := Q_1(t)$ défini par :

$$\big(Q(t)f\big)(x) := \mathbb{E}_x\big[f(X_1)\, e^{i\,\langle t, S_1\rangle}\big] \quad (x \in E). \tag{5.57}$$

Les opérateurs $Q(t)$ sont appelés opérateurs de Fourier et dans le but d'étudier l'hypothèse $\mathcal{R}(m)$, on peut observer que (5.56) conduit à la formule suivante :

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_n)\, e^{i\,\langle t, S_n\rangle}\big] = \big(Q(t)^n f\big)(x) \quad (x \in E). \tag{5.58}$$

Montrons que les marches aléatoires markoviennes vérifient la condition ($\mathcal{G}$).

Marches aléatoires markoviennes.
Si $((X_n, S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E \times \mathbb{R}^d$ et de probabilité de transition P vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, a) \in E \times \mathbb{R}^d,\ \forall A \in \mathcal{E},\ \forall B \in B(\mathbb{R}^d), \quad P\big((x, a), A \times B\big) = P\big((x, 0), A \times (B - a)\big),$$

la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée marche aléatoire markovienne (MRW). On montre facilement que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une chaîne de Markov, appelée chaîne conductrice de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons

$S_0 = 0$ (ici la notation $\mathbb{E}_x$ doit être remplacée par $\mathbb{E}_{(x,0)}$). La propriété de translation précédente est équivalente à la suivante : pour toute fonction mesurable bornée F sur $E \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on a $(PF)_a = P(F_a)$, où l'on pose, pour tout $G : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$:

$$G_a(x, b) := G(x, b + a).$$

Vérifions maintenant la condition $(\mathcal{G})$. Fixons $t \in \mathbb{R}^d$. Etant donné $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, posons : $F(x, b) := f(x)\, e^{i\langle t,b\rangle}$ pour $x \in E$ et $b \in \mathbb{R}^d$. On a :

$$\begin{aligned}\big(Q_n(t)f\big)(x) := \mathbb{E}_x\big[f(X_n)\, e^{i\langle t,S_n\rangle}\big] &= \mathbb{E}_x\big[(PF)(X_{n-1}, S_{n-1})\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[(PF)_{S_{n-1}}(X_{n-1}, 0)\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[(PF_{S_{n-1}})(X_{n-1}, 0)\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[(PF)(X_{n-1}, 0)\, e^{i\,\langle t,S_{n-1}\rangle}\big],\end{aligned}$$

en utilisant : $F_a(y, b) = f(y)\, e^{i\,\langle t,b+a\rangle} = e^{i\,\langle t,a\rangle}\, F(y, b)$ pour obtenir la dernière égalité. On a ainsi : $\big(Q_n(t)f\big)(x) = \mathbb{E}_x\big[g(X_{n-1})\, e^{i\,\langle t,S_{n-1}\rangle}\big] = \big(Q_{n-1}(t)g\big)(x)$ avec

$$g(\cdot) := (PF)(\cdot, 0) = \mathbb{E}_{\cdot}\big[f(X_1)\, e^{i\,\langle t,S_1\rangle}\big] = (Q_1(t)f)(\cdot).$$

On a prouvé que $\big(Q_n(t)f\big)(x) = \big(Q_{n-1}(t) \circ Q_1(t)f\big)(x)$ et la condition $(\mathcal{G})$ est satisfaite.

Remarque 5.9. *Les théorèmes de renouvellement peuvent être étudiés dans le cadre général précédent d'une suite $((X_n, S_n))_{n\geq 0}$ vérifiant la condition $(\mathcal{G})$ en adaptant la procédure de dérivation de [48] et en supposant la chaîne de Markov conductrice $(X_n)_{n\geq 0}$ fortement ergodique sur une famille d'espaces de Banach, les conditions de moment s'exprimant alors avec (X_1, S_1).*

Chapitre 6

Cas des modèles itératifs lipschitziens.

Dans ce chapitre, on applique la méthode spectrale généralisée du chapitre précédent pour démontrer des théorèmes de renouvellement dans le cadre des modèles itératifs lipschitziens. Ces théorèmes sont établis ici plus précisément pour des fonctionnelles additives associées, non pas seulement au modèle itératif $(X_n)_{n\geq 0}$ lui-même, mais à la chaîne double $(F_n, X_{n-1})_{n\geq 1}$, où $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite i.i.d. de transformations lipschitziennes aléatoires définissant $(X_n)_{n\geq 1}$ par la formule itérative : $X_n = F_n X_{n-1}$.

Dans la section 6.1, on présente des conditions assurant l'existence et l'unicité de la probabilité invariante. Dans la section 6.2, on introduit les espaces de fonctions Lipschitz à poids sur lesquels opéreront les opérateurs de Fourier dans le cadre de la procédure de dérivation du chapitre précédent. Ces espaces, qui sont du même type que ceux introduits par Le Page [58], ont été utilisés dans de nombreux travaux, voir par exemple [63, 66, 41, 42, 36, 13, 48]. Cependant la définition du poids est ici légèrement modifiée. L'intérêt de cette nouvelle définition a été mentionné en introduction : elle permet de diviser par 2 l'ordre des conditions de moment donné dans [42]. La forte ergodicité sur ces espaces de fonctions Lipschitz à poids est étudiée dans la sous-section 6.2.3 en s'inspirant (et en simplifiant parfois) les arguments de [42].

L'intérêt de considérer la chaîne double $(F_n, X_{n-1})_{n\geq 1}$ est expliqué dans la section 6.3 : une telle chaîne est souvent utilisée pour l'étude des produits de transformations aléatoires, et l'étude statistique des modèles itératifs fait appel aux fonctionnelles additives de la chaîne $(X_{n-1}, X_n)_{n\geq 1}$, donc de $(F_n, X_{n-1})_{n\geq 1}$. Les théorèmes de renouvellement pour les fonctionnelles additives associées à la chaîne double sont présentés dans la section 6.4, et illustrés à la section 6.5 avec notamment une application aux produits de transformations aléatoires dites topicales, qui complète les résultats de Merlet [61].

La preuve des théorèmes de renouvellement est donnée dans la section 6.6. Comparables à ceux faits dans [42, 48], les calculs effectués sur les espaces de fonctions Lipschitz à poids, pour vérifier les hypothèses du théorème de Keller-Liverani et étudier la régularité pour les opérateurs de Fourier, sont néanmoins plus techniques dans le cas de la chaîne double. Ils ont été effectués conjointement avec Déborah Ferré. Les résultats obtenus peuvent être appliqués pour démontrer d'autres théorèmes limites, voir [27]. Mentionnons enfin que, dans le cadre des processus autorégressifs (exemples classiques de modèles itératifs), la méthode spectrale généralisée a été utilisée dans [36, 13] dans le but d'établir des résultats de convergence vers des lois stables pour la fonctionnelle additive $\sum_{k=1}^{n} X_k$. Voir aussi [30, 17].

Précisons maintenant les notations utilisées dans ce chapitre, et la définition des modèles itératifs lipschitziens. On désigne par (E, d) un espace métrique complet, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$, par $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, et par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans G, soit X_0 une v.a. à valeurs dans E, indépendante de $(\theta_n)_{n\geq 1}$, et soit $F : G \times E \to E$ une fonction mesurable. On utilisera la notation suivante :

$$\forall (\theta, x) \in G \times E, \quad F_\theta x := F(\theta, x).$$

Définissons alors par récurrence la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans E, en posant :

$$\forall n \geq 1, \; X_n = F(\theta_n, X_{n-1}) = F_{\theta_n} X_{n-1}. \tag{6.1}$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition Q est définie pour toute fonction réelle mesurable f bornée sur E par :

$$(Qf)(x) = \mathbb{E}[\, f(F_{\theta_1} x)\,]. \tag{6.2}$$

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout $\theta \in G$, l'application $F_\theta : (E, d) \to (E, d)$ est lipschitzienne, et on note $c(\theta)$, et parfois $c_d(\theta)$ pour faire référence à la distance $d(\cdot, \cdot)$, le coefficient de Lipschitz de F_θ. Autrement dit on suppose que, pour tout $\theta \in G$,

$$c(\theta) = c_d(\theta) := \sup \left\{ \frac{d(F_\theta x, F_\theta y)}{d(x, y)}, \; x, y \in E, \; x \neq y \right\} \in \mathbb{R}^+. \tag{6.3}$$

La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est alors appelée un modèle itératif lipschitzien (cf. [20] et [22]). Enfin, on considère dans toute la suite un point quelconque (fixé) $x_0 \in E$.

6.1 Existence et unicité d'une probabilité invariante.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un modèle itératif lipschitzien. La proposition suivante nous donne, sous une hypothèse de contraction en moyenne et une hypothèse de moment, l'existence et l'unicité d'une loi de probabilité π, Q-invariante, c'est-à-dire vérifiant pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée : $\pi(Qf) = \pi(f)$.

Proposition 6.1. *Soit $p > 0$. Si $\mathbb{E}[c(\theta_1)^p] < 1$ et $\mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1} x_0)^p] < +\infty$, alors il existe une unique probabilité, π, Q- invariante, et l'on a $\pi(d(x_0, \cdot)^p) < +\infty$.*

Précisons qu'il existe des conditions plus faibles que les précédentes, assurant l'existence d'une probabilité invariante pour un modèle itératif lipschitzien, voir [20] et [22]. Cependant, les conditions de la proposition 6.1 sont bien adaptées à la suite de notre étude.

Démonstration. Si $p \in]0, 1[$, alors $d' := d^p$ est une distance sur E, l'espace (E, d') est complet, et pour tout $\theta \in G$, on a $c_{d'}(\theta) := c_d(\theta)^p$, et donc par hypothèse $\mathbb{E}[c_{d'}(\theta_1)] < 1$ et

$\mathbb{E}[d'(x_0, F_{\theta_1}x_0)] < +\infty$. Par conséquent (quitte à changer d en d' si $p \in]0, 1[$), on peut supposer pour prouver la proposition 6.1 que $p \geq 1$. Définissons les suites de v.a. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit. On pose $Z_0 = \tilde{Z}_0 = Id$ (l'application identité sur E), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$Z_n := F_{\theta_n} \circ \cdots \circ F_{\theta_1} \quad \text{et} \quad \tilde{Z}_n := F_{\theta_1} \circ \cdots \circ F_{\theta_n}.$$

Lemme 6.1. *Pour tout $x \in E$, la limite $\tilde{Z}_\infty := \lim_{n\to+\infty} \tilde{Z}_n(x)$ existe $\mathbb{P}$-p.s. et elle est indépendante de x.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les v.a. $c(\theta_1), \cdots, c(\theta_n)$, et $d(x_0, F_{\theta_{n+1}}x_0)$ sont indépendantes, et les v.a. $c(\theta_1), \cdots, c(\theta_n)$ (resp. $d(x_0, F_{\theta_1}x_0)$ et $d(x_0, F_{\theta_{n+1}}x_0)$) ont la même loi. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons $\mathbb{E}[c(\theta_1)] < 1$ et $\mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)] < +\infty$. En outre, la somme de la série de v.a. positives $\sum_{n\geq 0} d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))$ est intégrable car

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))\big] &= \mathbb{E}[d(x_0, \tilde{Z}_1(x_0)] + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))\big] \\
&\leq \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)] + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[c(\theta_1)\cdots c(\theta_n) d(x_0, F_{\theta_{n+1}}x_0)\big] \\
&\leq \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)] + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\big[c(\theta_1)\big]\cdots \mathbb{E}[c(\theta_n)\big]\mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_{n+1}}x_0)] \\
&\leq \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)] + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[c(\theta_1)]^n \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)] \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[c(\theta_1)]^n \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)] \\
&\leq \frac{1}{1 - \mathbb{E}[c(\theta_1)]} \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)].
\end{aligned}$$

Donc la série de v.a $\sum_{n\geq 0} d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))$ converge $\mathbb{P}-$presque sûrement. D'où la convergence presque sûre de la suite de v.a. $(\tilde{Z}_n(x_0))_n$. Considérons alors $\Omega'' \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$ et $\forall \omega \in \Omega''$, la suite $(\tilde{Z}_n(\omega)(x_0))$ converge. Posons

$$\forall \omega \in \Omega'', \quad \tilde{Z}_\infty(\omega)(x_0) := \lim_{n\to+\infty} \tilde{Z}_n(\omega)(x_0).$$

La suite de v.a. $(c(\theta_n))_n$ étant une suite de v.a.i.i.d. intégrables, on obtient, par la loi forte des grands nombres, l'existence de $\Omega' \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ et

$$\forall \omega \in \Omega', \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\big(c(\theta_1(\omega)) + \cdots + c(\theta_n(\omega))\big) = \mathbb{E}[c(\theta_1)].$$

Soient $\omega \in \Omega'$, et r tel que $\mathbb{E}[c(\theta_1] < r < 1$. Comme on a

$$\big(c(\theta_1)\cdots c(\theta_n)\big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\big(c(\theta_1) + \cdots + c(\theta_n)\big),$$

il existe $N(\omega) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N(\omega)$, $c(\theta_1(\omega)) \cdots c(\theta_n(\omega)) \leq r^n$. Par conséquent, on a : $\forall \omega \in \Omega'$, $\lim_{n\to+\infty} c(\theta_1(\omega)) \cdots c(\theta_n(\omega)) = 0$. Soit maintenant $x \in E$. Comme on a

$$\forall \omega \in \Omega, \quad d\big(\tilde{Z}_n(\omega)(x), \tilde{Z}_n(\omega)(x_0)\big) \leq c(\theta_1(\omega)) \cdots c(\theta_n(\omega))\, d(x, x_0),$$

on obtient : $\forall \omega \in \Omega' \cap \Omega''$, $\lim_{n\to+\infty} \tilde{Z}_n(\omega)(x) = \tilde{Z}_\infty(\omega)(x_0)$. □

Dans toute la suite, on note π la loi de la v.a. $\tilde{Z}_\infty$.

Lemme 6.2. *π est Q-invariante.*

Démonstration. Comme les v.a. $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont indépendantes et de même loi, $\tilde{Z}_n(x_0)$ et $Z_n(x_0)$ ont la même loi. Soit f une fonction continue bornée de E dans $\mathbb{R}$. On a donc, par convergence dominée :

$$\pi(f) = \mathbb{E}[f(\tilde{Z}_\infty)] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(\tilde{Z}_n(x_0))] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(Z_n(x_0))].$$

Par ailleurs, $(Z_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ correspond au modèle itératif défini en (6.1) avec $X_0 = x_0$. Autrement dit, $(Z_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition Q et de probabilité initiale δ_{x_0} (distribution de Dirac en x_0). On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[f(Z_n(x_0))] = (Q^n f)(x_0)$. En appliquant les remarques précédentes à f et Qf, on obtient :

$$\pi(f) = \lim_{n\to+\infty} (Q^n f)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} (Q^{n+1} f)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} (Q^n(Qf))(x_0) = \pi(Qf),$$

ce qui démontre bien le lemme. □

Lemme 6.3. *π est l'unique probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ Q-invariante.*

Démonstration. Soit π' une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ Q-invariante. Soit f une fonction continue bornée de E dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'égalité $\mathbb{E}[f(Z_n(x_0))] = (Q^n f)(x_0)$ et la Q-invariance de π' nous donnent :

$$\pi'(f) = \pi'(Q^n f) = \int_E \mathbb{E}[f(Z_n(y))]\, d\pi'(y) = \int_E \mathbb{E}[f(\tilde{Z}_n(y))]\, d\pi'(y).$$

Par le lemme 6.1, on sait que, pour tout $y \in E$, la suite $(\tilde{Z}_n(y))_n$ converge en loi vers $\tilde{Z}_\infty$, donc : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(\tilde{Z}_n(y))] = \mathbb{E}[f(\tilde{Z}_\infty)]$. Et comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall y \in E$, $|f(\tilde{Z}_n(y))| \leq \sup_{a\in E} |f(a)|$, le théorème de convergence dominée nous donne alors, en passant à la limite dans la dernière intégrale, que $\pi'(f) = \mathbb{E}[f(\tilde{Z}_\infty)] = \pi(f)$. □

Lemme 6.4. *La fonction $d(x_0, .)^p$ est intégrable par rapport à la probabilité Q-invariante π.*

Démonstration. Rappelons que π est la loi de la v.a. $\tilde{Z}_\infty$. Notons $\|.\|_p$ la norme usuelle de $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à des arguments déjà utilisés (cf. le début de la preuve du lemme 6.1), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))^p\big] &\leq \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^p \cdots c(\theta_n)^p\, d(x_0, F_{\theta_{n+1}} x_0)^p\big] \\
&\leq \big(\mathbb{E}[c(\theta_1)^p]\big)^n\, \mathbb{E}\big[d(x_0, F_{\theta_1} x_0)^p\big],
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\|d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))\|_p \leq \|c(\theta_1)\|_p^n \|d(x_0, F_{\theta_1} x_0)\|_p.$$

On sait par hypothèse que $\mathbb{E}[c(\theta_1)^p] < 1$, et le lemme 6.1 assure qu'on a $\mathbb{P}-$presque sûrement : $d(x_0, \tilde{Z}_\infty) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))$. Comme $\left(\pi(d(x_0, .)^p)\right)^{\frac{1}{p}} = \|d(x_0, \tilde{Z}_\infty)\|_p$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\pi(d(x_0, .)^p)\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|d(x_0, F_{\theta_1} x_0)\|_p + \|\sum_{n=1}^{+\infty} d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))\|_p \\
&\leq \|d(x_0, F_{\theta_1} x_0)\|_p + \sum_{n=1}^{+\infty} \|d(\tilde{Z}_n(x_0), \tilde{Z}_{n+1}(x_0))\|_p \\
&\leq \frac{1}{\|c(\theta_1)\|_p} \|d(x_0, F_{\theta_1} x_0)\|_p,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien la propriété souhaitée, car par hypothèse on a $\|d(x_0, F_{\theta_1} x_0)\|_p < +\infty$. □

6.2 Définition d'espaces de Lipschitz à poids.

Nous supposons dans cette section que toute boule fermée de l'espace métrique complet (E, d) est compacte (en précisant que cette hypothèse supplémentaire n'intervient que dans la preuve de la proposition 6.6).

6.2.1 Définition des espaces $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Nous modifions légèrement ici la définition des espaces de Lipschitz à poids introduits dans [58], en considérant un paramètre supplémentaire (cf β ci-dessous) dans la définition du "poids". L'intérêt du paramètre β sera précisé dans la remarque 6.3 (page 182).

Pour $\lambda \in]0, 1]$, on définit la fonction poids p_λ associée à la distance d en posant, pour $x \in E$:

$$p_\lambda(x) = 1 + \lambda\, d(x, x_0). \tag{6.4}$$

On note plus simplement p la fonction p_1 :

$$p(x) = 1 + d(x, x_0). \tag{6.5}$$

Soit $\alpha \in]0, 1]$. Soit $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \beta \leq \gamma$. Notons, pour $(x, y) \in E^2$:

$$\Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) = p_\lambda(x)^{\alpha\beta}\, p_\lambda(y)^{\alpha\gamma} + p_\lambda(x)^{\alpha\gamma}\, p_\lambda(y)^{\alpha\beta} \tag{6.6}$$

et plus simplement $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}$ la fonction $\Delta^{(1)}_{\alpha,\beta,\gamma}$. On désigne alors par $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ l'espace des fonctions f de E dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition suivante

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha\, \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y)},\ x, y \in E,\ x \neq y\right\} < +\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$. On pose

$$m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) := \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y)},\ x,y \in E,\ x \neq y\right\} < +\infty.$$

En outre, comme $d(x_0,x) \leq \frac{1}{\lambda}p_\lambda(x)$, on a $|f(x)| \leq |f(x_0)| + \frac{2}{\lambda^\alpha}\, m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)}$, ce qui permet de considérer

$$|f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma} := \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)}} < +\infty. \tag{6.7}$$

Dans le cas particulier $\beta = \gamma$, nous noterons plus simplement $\mathcal{B}_{\alpha,\gamma}$ l'espace $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Remarque 6.1. *L'espace $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ ne dépend pas du paramètre $\lambda \in]0,1]$, c'est pourquoi λ n'intervient pas dans la notation. Ce paramètre jouera cependant un rôle important au niveau du choix de la norme de $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ en vu d'obtenir la forte ergodicité de Q et les inégalités de Doeblin-Fortet pour les noyaux de Fourier (voir les preuves des propositions 6.7 et 6.9). Notons d'ailleurs que les normes ci-dessus, pour deux valeurs données du paramètre λ, sont évidemment équivalentes. Cette remarque s'étend aux normes définies dans la section suivante.*

6.2.2 Définitions de normes équivalentes sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Supposons que $\alpha \in]0,1]$ et $\gamma > 0$ soient tels que

$$\mathbb{E}[c(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}] < 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[d(x_0, F_{\theta_1}x_0)^{\alpha(\gamma+1)}] < +\infty. \tag{6.8}$$

Il existe donc, d'après la proposition 6.1, une unique probabilité π, Q-invariante et

$$\pi(d(x_0,.)^{\alpha(\gamma+1)}) < +\infty. \tag{6.9}$$

Remarquons alors que, d'après (6.9) et (6.7), toute fonction de $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ est π- intégrable. Les applications $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}$ et $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\pi}$ définies respectivement pour $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ par :

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma} &:= m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma},\\
\|f\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|} &:= m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + |\pi(f)|,\\
\|f\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\pi} &:= m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + \pi(|f|),
\end{aligned}$$

sont clairement des normes sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$. Nous noterons plus simplement $\|.\|_{\alpha,\beta,\gamma}$ (resp. $\|.\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}$ et $\|.\|_{\alpha,\beta,\gamma,\pi}$) les normes $\|.\|^{(1)}_{\alpha,\beta,\gamma}$ (resp. $\|.\|^{(1)}_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}$ et $\|.\|^{(1)}_{\alpha,\beta,\gamma,\pi}$).

Vérifions maintenant que ces trois normes sont équivalentes sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et que cet espace, muni de l'une quelconque de ces normes, est complet. Les preuves proposées ci-dessous réorganisent et simplifient celles de [42] dans le cadre du nouveau poids introduit précédemment.

Proposition 6.2. *Les normes $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}$ sont équivalentes sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$. Comme $|f| \leq |f|_{\alpha,\gamma}^{(\lambda)} p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)}$, on a

$$|\pi(f)| \leq \pi(|f|) \leq |f|_{\alpha,\gamma}^{(\lambda)} \pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)}).$$

Donc $\|f\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda)} \leq [1 + \pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})] \|f\|_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}$. Pour démontrer l'inégalité de domination réciproque, considérons tout d'abord $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ à valeurs réelles. Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + (f(x) - f(y)) \\
&\leq f(y) + m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) d(x,y)^\alpha \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(x,y) \\
&\leq f(y) + m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) \big(d(x_0,x)^\alpha + d(x_0,y)^\alpha\big) 2p_\lambda(x)^{\alpha\gamma} p_\lambda(y)^{\alpha\gamma} \\
&\leq f(y) + \frac{2}{\lambda^\alpha} m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) \Big[p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)} p_\lambda(y)^{\alpha\gamma} + p_\lambda(x)^{\alpha\gamma} p_\lambda(y)^{\alpha(\gamma+1)}\Big].
\end{aligned}$$

D'où, en intégrant par rapport à y, avec x fixé :

$$f(x) \leq |\pi(f)| + \frac{2}{\lambda^\alpha} m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) \Big[p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)} \pi(p_\lambda^{\alpha\gamma}) + p_\lambda(x)^\gamma \pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})\Big].$$

En raisonnant de même avec $-f$, on obtient plus précisément que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |\pi(f)| + \frac{2}{\lambda^\alpha} m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) \Big[p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)} \pi(p_\lambda^{\alpha\gamma}) + p_\lambda(x)^{\alpha\gamma} \pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})\Big] \\
&\leq |\pi(f)| + 4 \frac{\pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})}{\lambda^\alpha} m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)}.
\end{aligned}$$

Revenons maintenant au cas général d'une fonction f de $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ à valeurs complexes. On obtient, en utilisant l'inégalité précédente avec $Re(f)$ et $Im(f)$, que :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |Re(f(x))| + |Im(f(x))| \\
&\leq |\pi(Re(f)| + |\pi(Im(f)| + 4 \frac{\pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})}{\lambda^\alpha} \big[m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(Re(f)) + m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(Im(f))\big] p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)} \\
&\leq \sqrt{2} |\pi(f)| + 8 \frac{\pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})}{\lambda^\alpha} m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f) p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)}.
\end{aligned}$$

D'où $|f|_{\alpha,\gamma}^{(\lambda)} \leq \sqrt{2} |\pi(f)| + 8\, \lambda^{-\alpha} \pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})\, m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}(f)$, et finalement

$$\|f|_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)} \leq \big(\sqrt{2} + 8\, \lambda^{-\alpha} \pi(p_\lambda^{\alpha(\gamma+1)})\big) \|f\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda)}.$$

L'équivalence des normes $\| \cdot \|_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}$ et $\| \cdot \|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda)}$ sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ est ainsi démontrée. □

On obtient de même mais plus facilement (à partir d'inégalités analogues établies directement sur $|f|$) la propriété suivante.

Proposition 6.3. *Les normes* $\|.\|_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)}$ *et* $\|.\|_{\alpha,\beta,\gamma,\pi}^{(\lambda)}$ *sont équivalentes sur* $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Enfin, on peut montrer par des arguments classiques que l'espace $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda)})$ est complet. Par équivalence de normes, on dispose alors du résultat suivant.

Proposition 6.4. *Les trois espaces vectoriels normés* $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma},\, \|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma})$, $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma},\, \|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|})$ *et enfin* $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma},\, \|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\pi})$ *sont des espaces de Banach.*

Considérons maintenant $\gamma' > \gamma$. On vérifie immédiatement que l'application $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}$ définie, pour tout $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$, par :

$$\|f\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} := m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'} \tag{6.10}$$

est une norme sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$. L'espace $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ muni de la norme $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}$ est un espace de Banach car on a la propriété suivante.

Proposition 6.5. *Pour tout* $\gamma' > \gamma$, *les normes* $\|.\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}$ *et* $\|.\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Clairement $\|.\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} \leq \|.\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}$. De plus, pour tous $x \in E$ et $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$,

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 2(\frac{1}{\lambda})^{\alpha}\, m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)} \;\text{ et } |f(x_0)| \leq |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'}$$

donc

$$\frac{|f(x)|}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)}} \leq |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'} + 2(\frac{1}{\lambda})^{\alpha}\, m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) \leq 2(\frac{1}{\lambda})^{\alpha}\big(m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'}\big).$$

Par conséquent, on a

$$|f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma} \leq 2(\frac{1}{\lambda})^{\alpha}\|f\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} \tag{6.11}$$

et donc $\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma} \leq (1 + 2\,\lambda^{-\alpha})\|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}$. □

Proposition 6.6. *Soit* $\gamma' > \gamma$. *Alors l'injection canonique de* $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'})$ *dans* $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \|\cdot\|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'})$ *est compacte.*

Démonstration. Nous détaillons la preuve de [42, Lem. 5.4] basée sur le théorème d'Ascoli et le procédé diagonal. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} \leq 1$. On a donc pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in E^2$, $|f_n(x)| \leq p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+1)}$, et

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq d(x, y)^{\alpha}(p_\lambda(x)^{\alpha\beta}\, p_\lambda(y)^{\alpha\gamma} + p_\lambda(x)^{\alpha\gamma}\, p_\lambda(y)^{\alpha\beta}). \tag{6.12}$$

La suite $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de E dans $\mathbb{C}$ uniformément équicontinue et uniformément bornée sur le compact $B(x_0, R)$ car, d'après (6.12), on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in B(x_0, R)^2$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2(1 + \lambda R)^{\alpha\beta}(1 + \lambda R)^{\alpha\gamma} d(x, y)^{\alpha} \;\text{ et } |f_n(x)| \leq (1 + \lambda R)^{\alpha(\gamma'+1)}.$$

Notons $B_p := B(x_0, p)$, $p \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème d'Ascoli, il existe une suite extraite $(f_n)_{n\in I_1}$ de $(f_n)_n$ qui converge uniformément sur B_1 vers g_1. Comme la suite $(f_n)_{n\in I_1}$ est uniformément équicontinue et uniformément bornée sur le compact B_2, il existe une suite extraite $(f_n)_{n\in I_2}$ de $(f_n)_{n\in I_1}$ qui converge uniformément sur B_2 vers g_2, la restriction de g_2 à B_1 étant égale à g_1. En itérant le procédé, on obtient une suite décroissante de sous-ensembles de $\mathbb{N}$: $I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_k \ldots$ et une suite de fonctions $(g_k)_{k\geq 1}$ telles que pour tout $k \geq 1$, $(f_n)_{n\in I_k}$ converge uniformément sur B_k vers g_k, la restriction de g_{k+1} à B_k étant égale à g_k. Soit $x \in E$. Posons $g(x) := g_p(x)$ avec $p := \min\{k \in \mathbb{N}^*, x \in B_k\}$. Pour $k, j \in \mathbb{N}^*$, notons n_k^j le j-ème terme de I_k, et $\phi(k) := n_k^k$. Alors la suite $(f_{\phi(n)})$ converge simplement vers g sur E et uniformément vers g sur B_p, $p \in \mathbb{N}^*$, car la suite $(f_{\phi(n)})_{n\geq p}$ est une suite extraite de $(f_n)_{n\in I_p}$. En utilisant (6.12) avec $\phi(n)$ à la place de n et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $g \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et que $\|g\|_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}^{(\lambda)} \leq 1$. Il nous reste à montrer que $\lim_{n\to+\infty} |f_{\phi(n)} - g|_{\alpha,\gamma'}^{(\lambda)} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|f_{\phi(n)} - g|_{\alpha,\gamma}^{(\lambda)} \leq 4\,\lambda^{-\alpha}$ (cf. (6.11)), on peut fixer $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \notin B_p$, on ait $p_\lambda(x)^{-\alpha(\gamma'-\gamma)} \leq \frac{\lambda^\alpha}{4}\varepsilon$. Alors pour tout $x \notin B_p$,

$$\frac{|f_{\phi(n)}(x) - g(x)|}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+1)}} \leq \frac{4\,\lambda^{-\alpha}}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'-\gamma)}} \leq \varepsilon$$

Et comme $(f_{\phi(n)})$ converge uniformément vers g sur B_p, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall x \in B_p, \quad \frac{|f_{\phi(n)}(x) - g(x)|}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+1)}} \leq |f_{\phi(n)}(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où, pour tous $n \geq N$ et $x \in E$: $\frac{|f_{\phi(n)}(x)-g(x)|}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+1)}} \leq \varepsilon$. □

6.2.3 Forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Notons, pour tout $\theta \in G$,

$$M_\lambda(\theta) = \max(1, c(\theta)) + \lambda d(x_0, F_\theta x_0) \tag{6.13}$$

et plus simplement $M(\cdot)$ la fonction $M_1(\cdot)$. La proposition suivante généralise à $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ la propriété de forte ergodicité de [42] [Th. 5.5] démontrée dans le cas $\beta = \gamma$.

Proposition 6.7. *Supposons que*

$$\mathbb{E}\big[M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)} + c(\theta_1)^\alpha\, M(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\big] < +\infty. \tag{6.14}$$

Alors $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma})$. *Si en outre*

$$\mathbb{E}\big[c(\theta_1)^\alpha \max(1, c(\theta_1))^{\alpha(\beta+\gamma)}\big] < 1, \tag{6.15}$$

alors il existe $C > 0$ *et* $A \in [0, 1[$ *tels que*

$$\forall f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \;\; \|Q^n f - \pi(f)1\|_{\alpha,\beta,\gamma} \leq C\, A^n \|f\|_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

La conclusion précédente signifie que Q est fortement ergodique sur $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \|\cdot\|_{\alpha,\beta,\gamma})$, mais aussi sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ muni de l'une quelconque des autres normes (équivalentes) introduites dans la sous-section précédente. Remarquons que les deux hypothèses (6.14) et (6.15) de la proposition 6.7 impliquent (6.8), donc (6.9). Commençons par prouver un lemme que nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite :

Lemme 6.5. *Soit $\lambda \in]0,1]$. On a, pour tous $x \in E$ et $\theta \in G$,*

$$\frac{p_\lambda(F_\theta x)}{p_\lambda(x)} \leq M_\lambda(\theta) \leq M(\theta)$$

et pour tous $\alpha \in]0,1]$, $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \beta \leq \gamma$, et tout $(x,y) \in E^2$:

$$\Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(F_\theta x, F_\theta y) \leq M_\lambda(\theta)^{\alpha(\beta+\gamma)}\,\Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y).$$

Démonstration. Comme F_θ est lipschitzienne de (E,d) dans (E,d) (cf (6.3)), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{p_\lambda(F_\theta x)}{p_\lambda(x)} &= \frac{1+\lambda d(F_\theta x, x_0) - \lambda d(F_\theta x_0, x_0)}{1+\lambda\ d(x,x_0)} + \frac{\lambda d(F_\theta x_0, x_0)}{1+\lambda d(x,x_0)} \\
&\leq \frac{1+\lambda d(F_\theta x, F_\theta x_0)}{1+\lambda d(x,x_0)} + \lambda d(F_\theta x_0, x_0) \\
&\leq \frac{1+\lambda c(\theta) d(x,x_0)}{1+\lambda d(x,x_0)} + \lambda d(F_\theta x_0, x_0) \\
&\leq \max(1, c(\theta)) + \lambda d(F_\theta x_0, x_0),
\end{aligned}$$

d'où la première inégalité. Il vient que

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(F_\theta x, F_\theta y) &= p_\lambda(F_\theta x)^{\alpha\beta}\, p_\lambda(F_\theta y)^{\alpha\gamma} + p_\lambda(F_\theta x)^{\alpha\gamma}\, p_\lambda(F_\theta y)^{\alpha\beta} \\
&\leq M_\lambda(\theta)^{\alpha\beta}\, p_\lambda(x)^{\alpha\beta}\, M_\lambda(\theta)^{\alpha\gamma}\, p_\lambda(y)^{\alpha\gamma} + M_\lambda(\theta)^{\alpha\gamma}\, p_\lambda(x)^{\alpha\gamma}\, M_\lambda(\theta)^{\alpha\beta} p_\lambda(y)^{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

ce qui démontre la seconde inégalité. □

Preuve de la proposition 6.7. Soit $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$. En utilisant (6.7) et le lemme 6.5, on a

$$|(Qf)(x)| \leq \mathbb{E}[\,|f(F_{\theta_1}x)|\,] \leq |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma}\, \mathbb{E}[\,M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\,]\, p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma+1)}.$$

En d'autres termes,

$$|Qf|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma} \leq \mathbb{E}[\,M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\,]\, |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma}. \tag{6.16}$$

Soit $(x,y) \in E^2$. On a, en utilisant à nouveau le lemme 6.5,

$$\begin{aligned}
|(Qf)(x) - (Qf)(y)| &\leq \mathbb{E}[\,|f(F_{\theta_1}x) - f(F_{\theta_1}y)|\,] \\
&\leq m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, \mathbb{E}\big[\,d(F_{\theta_1}x, F_{\theta_1}y)^\alpha\, \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(F_{\theta_1}x, F_{\theta_1}y)\,\big] \\
&\leq m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, \mathbb{E}\big[\,c(\theta_1)^\alpha\, M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\,\big]\, d(x,y)^\alpha \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(Qf) \leq \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^\alpha\, M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\,\big]\, m^{(\lambda)}_{\beta,\gamma}(f). \tag{6.17}$$

Donc, d'après (6.16) et (6.17), Q opère bien dans $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Pour établir le second point de la proposition 6.7, nous allons utiliser la norme $\|\cdot\|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}$ avec λ_0 choisi convenablement. Plus précisément, la norme précédente étant équivalente à $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\gamma}$, la propriété de forte ergodicité de la proposition 6.7 résulte du lemme suivant. □

Lemme 6.6. *Sous les hypothèses (6.14) (6.15), il existe* $\lambda_0 \in]0,1[$ *et* $A \in [0,1[$ *tels que*

$$\forall f \in B_{\alpha,\beta,\gamma}, \ \ \|Q^n f - \pi(f)1\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda_0)} \leq A^n \|f\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda_0)}.$$

Démonstration. Grâce à (6.14) (6.15), le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne :

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathbb{E}[c(\theta_1)^\alpha M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}] = \mathbb{E}[c(\theta_1)^\alpha \max(1, c(\theta_1))^{\alpha(\beta+\gamma)}] < 1,$$

de sorte qu'on peut choisir un réel $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que

$$A := \mathbb{E}[c(\theta_1)^\alpha M_{\lambda_0}(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}] < 1. \tag{6.18}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que, par définition de $m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda_0)}$, on a

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda_0)}\big(Q^n f - \pi(f)1\big) = m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda_0)}(Q^n f),$$

et que, π étant Q-invariante, on a $\pi\big(Q^n f - \pi(f)1\big) = \pi(Q^n f) - \pi(f) = 0$. En itérant l'inégalité (6.17) (avec $\lambda = \lambda_0$), on obtient finalement que

$$\|Q^n f - \pi(f)1\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda_0)} \leq A^n\, m_{\alpha,\beta,\gamma}^{(\lambda_0)}(f) \leq A^n \|f\|_{\alpha,\beta,\gamma,|\pi|}^{(\lambda_0)},$$

soit l'inégalité souhaitée. □

6.3 Fonctionnelles additives associées à la suite $((\theta_k, X_{k-1}))_k$.

On rappelle que $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

6.3.1 Cadre général.

On conserve les notations et hypothèses introduites au début de ce chapitre (page 166), et on considère un modèle itératif lipschitzien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par (6.1). Dans la suite, on s'intéressera aux fonctionnelles additives de la forme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi(\theta_k, X_{k-1}), \tag{6.19}$$

où $\xi : G \times E \to \mathbb{R}^d$ est une application mesurable pour laquelle il existe r, $s \in \mathbb{R}^+$, avec $r \leq s+1$, et deux applications R, $S : G \to \mathbb{R}^+$ mesurables telles que $\forall \theta \in G$, $\forall (x,y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \|\xi(\theta,x)\| &\leq R(\theta)\big(1 + d(x_0,x)\big)^r && (6.20)\\ \|\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)\| &\leq S(\theta) d(x,y)\big(1 + d(x_0,x) + d(x_0,y)\big)^s. && (6.21) \end{aligned}$$

Remarque 6.2. *On peut supposer* $r \leq s+1$ *car, si (6.21) est satisfaite, alors on a (6.20) avec* $r = s+1$ *et* $R(\theta) = \|\xi(\theta,x_0)\| + S(\theta)$.

Dans la prochaine section, on présentera les théorèmes de renouvellement du chapitre 2 pour les fonctionnelles additives (6.19), avec ξ vérifiant (6.20) et (6.21). Auparavant, nous donnons dans les exemples 1 et 2 ci-dessous, et dans la sous-section 6.3.2, des situations dans lesquelles apparaissent naturellement des sommes du type (6.19) .

Exemple 1. Le cadre précédent contient les fonctionnelles usuelles de la chaîne $(X_k)_k$. En effet, soit $u : E \to \mathbb{R}^d$ pour laquelle il existe deux constantes positives C et σ telles que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|u(x) - u(y)\| \leq C\, d(x,y)\big(1 + d(x_0,x) + d(x_0,y)\big)^{\sigma}. \tag{6.22}$$

En utilisant le lemme 6.5, on vérifie aisément que $\xi := u \circ F$, où F est la fonction introduite dans (6.1), vérifie les hypothèses (6.20) avec $r = \sigma + 1$ et (6.21) avec $s = \sigma$ et, à constantes multiplicatives près, $R(\theta) = M(\theta)^{\sigma+1}$ et $S(\theta) = c(\theta)M(\theta)^{\sigma}$. Dans cet exemple, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u(X_k).$$

Exemple 2. En statistique markovienne (voir par exemple [22]), on est conduit à étudier les sommes du type

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \psi(X_{k-1}, X_k),$$

pour une fonction mesurable donnée $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$. Par définition de X_n, on a $\psi(X_{k-1}, X_k) = \psi(X_{k-1}, F_{\theta_k} X_{k-1})$, et par conséquent S_n est aussi une somme du type (6.19).

6.3.2 Produits d'applications aléatoires.

Soient $\mathbb{M}$ un ensemble non vide, $\mathbb{A}$ un semi-groupe de transformations sur $\mathbb{M}$, et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{A}$. Considérons alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a à valeurs dans $\mathbb{A}$ définie par $P_0 = Id_{\mathbb{M}}$ (l'application identique sur $\mathbb{M}$) et

$$\forall n \geq 1, \quad P_n := A_n \circ \cdots \circ A_1.$$

Soient $e_0 \in \mathbb{M}$. Nous renvoyons à [57, 58, 8, 40, 35] (et à leurs bibliographies) pour des résultats généraux concernant le comportement des suites $(\phi(P_n(e_0)))_n$ pour certaines fonctions ϕ définies sur $\mathbb{M}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, avec $N \in \mathbb{N}^*$. En particulier, on pourra consulter [57, 41] et [35, p. 316] pour l'utilisation de la méthode spectrale usuelle dans ce cadre. Nous rappelons uniquement ici le procédé classique permettant de transformer $\phi(P_n(e_0))$ en une somme du type $\sum_{k=1}^{n} \xi(A_k, X_{k-1})$, où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un modèle itératif à valeurs dans un espace quotient.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\mathbb{M}$ telle que, pour tout $(e,e') \in \mathbb{M}^2$:

$$e\,\mathcal{R}\,e' \;\Rightarrow\; \forall A \in \mathbb{A},\; A(e)\,\mathcal{R}\,A(e'). \tag{6.23}$$

Soit $\phi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^N$ vérifiant la condition suivante : $\forall (e,e') \in \mathbb{M}^2$,

$$e\,\mathcal{R}\,e' \;\Rightarrow\; \forall A \in \mathbb{A},\;\; \phi\big(A(e)\big) - \phi(e) = \phi\big(A(e')\big) - \phi(e'). \tag{6.24}$$

Introduisons l'espace quotient $\mathbb{X} := \mathbb{M}/\mathcal{R}$. La propriété (6.24) permet de donner un sens à la fonction suivante $\xi : \mathbb{A} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}^N$:

$$\forall (A, e) \in \mathbb{A} \times \mathbb{M}, \quad \xi(A, \overline{e}) := \phi\big(A(e)\big) - \phi(e).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi(P_n(e_0)) - \phi(e_0) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\phi(P_k(e_0)) - \phi(P_{k-1}(e_0)) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\phi\big(A_k(P_{k-1}(e_0))\big) - \phi\big(P_{k-1}(e_0)\big) \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \xi(A_k, \overline{P_{k-1}(e_0)}). \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

Grâce à (6.23), on peut associer à chaque application $A \in \mathbb{A}$ l'application de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$, notée $\overline{A}$, définie par :

$$\overline{A}(\overline{e}) := \overline{A(e)}.$$

Comme $\mathbb{A}$ est stable par composition, on a, pour tout $k \geq 2$:

$$\overline{P_{k-1}(e_0)} = \overline{A}_{k-1} \circ \ldots \circ \overline{A}_1(\overline{e}_0)$$

et la suite de variables aléatoires $(X_n^{\overline{e}_0})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n^{\overline{e}_0} := \overline{P_n(e_0)}$$

est un modèle itératif car :

$$\forall n \geq 1, \quad X_n^{\overline{e}_0} = F(A_n, X_{n-1}^{\overline{e}_0}),$$

avec $F : \mathbb{A} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ définie pour tous $A \in \mathbb{A}$ et $x \in M$ par : $F(A, \overline{x}) := \overline{A}(\overline{x}) = \overline{A(x)}$.

La principale difficulté est alors de trouver une distance adéquate $d(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbb{X}$, pour laquelle les éléments $\overline{A}$ $(A \in \mathbb{A})$ possèdent de bonnes propriétés de contraction sur $(\mathbb{X}, d)$.

Les deux exemples suivants sont classiques, et utilisent $\phi(\cdot) := \ln \|\cdot\|$. Comme les espaces quotients correspondants sont bornés, la méthode spectrale usuelle peut être utilisée pour obtenir des théorèmes limites pour la suite $(\ln \|A_n \circ \cdots \circ A_1(e_0)\|)_n$. En particulier le théorème de renouvellement (cas $d = 1$) du chapitre 4 s'applique, voir [41].

Produit de matrices aléatoires inversibles.
Soit $\mathbb{M} = \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$, $\mathbb{A} = GL(q, \mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles inversibles d'ordre q, et soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{M}$ définie par : $e \,\mathcal{R}\, e'$ ssi e et e' sont colinéaires. La fonction $\phi(\cdot) := \ln \|\cdot\|$ vérifie clairement (6.24) et $\mathbb{X} := \mathbb{M}/\mathcal{R}$ (l'espace projectif usuel) s'identifie à la sphère unité de $\mathbb{R}^q$: $\mathbb{X} := \{e \in \mathbb{M},\ \|e\| = 1\}$. L'action induite par $A \in GL(q, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{X}$ est alors définie par : $\forall x \in \mathbb{X}$, $\overline{A}(x) := A(x)/\|A(x)\|$, et on a : $\forall (A, x) \in GL(q, \mathbb{R}) \times \mathbb{X}$, $\xi(A, x) := \phi\big(A(x)\big) - \phi(x) = \ln \|A(x)\|$. Enfin une distance appropriée sur $\mathbb{X}$ est celle définie par : $d(x, x') := |\sin \theta(x, x')|$, où $\theta(x, x')$ est l'angle entre x et x'. Dans [57], la méthode spectrale usuelle est appliquée dans ce cadre pour établir des raffinements du théorème limite

central, voir aussi [41]. Mentionnons que, pour les produits de matrices aléatoires inversibles, le théorème de Blackwell (plus précis que le résultat de renouvellement du chapitre 4) a été établi pour la suite $(\ln \|A_n \circ \cdots \circ A_1(e_0)\|)_n$ par Kesten [54] et Le Page [58], à l'aide de techniques très différentes des méthodes de Fourier, fondées notamment sur une extension du lemme de Choquet-Deny, voir également [55].

Produit de matrices aléatoires positives.
Ici $\mathbb{M} = (\mathbb{R}_+^*)^q$ et $\mathbb{A}$ est l'ensemble des matrices positives $q \times q$ dont chaque ligne et chaque colonne contient au moins un coefficient strictement positif. On choisit la même relation $\mathcal{R}$ que ci-dessus. Dans cet exemple, $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathbb{R}^q$ définie par : $\|e\| = \sum_{i=1}^q |e_i|$, $e = (e_1, \ldots, e_q) \in \mathbb{R}^q$. A ce changement de norme près, on peut définir comme dans l'exemple précédent la fonction ϕ sur $(\mathbb{R}_+^*)^q$, l'ensemble $\mathbb{X}$, l'action induite sur $\mathbb{X}$ par $A \in \mathbb{A}$, et enfin la fonction ξ sur $\mathbb{A} \times \mathbb{X}$. La distance adéquate sur $\mathbb{X}$ est ici la distance de Hilbert. Cet exemple est présenté dans [40, 41], voir aussi [42, 45, 44].

Nous détaillons un peu plus l'exemple suivant, inspiré du travail [61], car nous lui appliquerons par la suite les théorèmes de renouvellement de la prochaine section (cf. la sous-section 6.5.2).

Produits d'applications topicales aléatoires.
Soit $\mathbb{M} = \mathbb{R}^p$ et $\leq_{\mathbb{R}^p}$ la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}^p$. Notons $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A}$ l'ensemble des applications topicales sur $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire l'ensemble des applications A de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $\forall e \in \mathbb{R}^p,\ \forall c \in \mathbb{R},\quad A(e + c\,\mathbf{1}) = A(e) + c\,\mathbf{1}$,

(ii) $\forall (e, e') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p,\quad e \leq_{\mathbb{R}^p} e' \ \Rightarrow\ A(e) \leq_{\mathbb{R}^p} A(e')$.

Etant donnée une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de v.a.i.i.d à valeurs dans $\mathbb{A}$, on définit comme précédemment : $P_0 = Id_{\mathbb{M}}$ (l'identité sur $\mathbb{M}$) et $\forall n \geq 1,\quad P_n := A_n \circ \cdots \circ A_1$. Les situations où de telles applications interviennent sont présentées dans [61] (et dans la bibliographie jointe).

L'objet de l'étude faite dans [61] est d'établir des théorèmes limites pour des suites de la forme $(\phi(P_n(e_0)))_n$, avec $e_0 \in \mathbb{R}^p$, et $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (i. e. $\forall (e, e') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p,\quad e \leq_{\mathbb{R}^p} e' \ \Rightarrow\ \phi(e) \leq \phi(e')$) vérifiant :

$$\forall e \in \mathbb{R}^p,\ \forall c \in \mathbb{R},\quad \phi(e + c\,\mathbf{1}) = \phi(e) + c.$$

Les trois exemples typiques et simples de telles fonctions ϕ sont : $\forall e = (e_1, \ldots, e_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\phi(e) = e_i \quad (i = 1, \ldots, p), \qquad \phi(e) = \max_{i=1,\ldots,p} e_i, \qquad \phi(e) = \min_{i=1,\ldots,p} e_i.$$

On considère maintenant la relation d'équivalence suivante :

$$(e, e') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p : \quad e\,\mathcal{R}\,e' \ \Leftrightarrow\ e - e' \in \mathbb{R} \cdot \mathbf{1}.$$

Il est alors facile de voir que les propriétés (6.23) et (6.24) sont satisfaites. Enfin la distance considérée sur $\mathbb{X} := \mathbb{R}^p/\mathcal{R}$ dans [61] est la suivante :

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{X}^2, \quad d(\bar{x}, \bar{y}) := \max_{i=1,\ldots,p} (x_i - y_i) - \min_{i=1,\ldots,p} (x_i - y_i).$$

Les applications induites sur $\mathbb{X}$ par les éléments $A \in \mathbb{A}$ possèdent, vis-à-vis de cette distance, des propriétés de contraction sur lesquelles nous reviendrons dans la sous-section 6.5.2.

6.4 Énoncés des théorèmes de renouvellement pour les modèles itératifs lipschitziens.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $\| \cdot \|$) désigne le produit scalaire canonique (resp. la norme euclidienne associée) de $\mathbb{R}^d$. Dans cette section, (E, d) est un espace métrique complet tel que toute boule fermée de E soit compacte. Les notations concernant les modèles itératifs lipschitziens sont présentées au début du chapitre (page 166).

Dans l'énoncé général ci-dessous, on considère

– $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un modèle itératif lipschitzien (cf. (6.1)),

– $\xi : G \times E \to \mathbb{R}^d$ vérifiant les hypothèses (6.20) et (6.21),

– $S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi(\theta_k, X_{k-1})$, la fonctionnelle additive associée (cf. sous-section 6.3.1).

Rappelons que la probabilité de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée Q, est définie en (6.2). Grâce à la proposition 6.1, les hypothèses de moment/contraction ci-dessous nous permettront, dans tous les cas envisagés au théorème 6.1, de définir :

– *La probabilité Q-invariante, notée π,*

– *Le vecteur moyen :*

$$\vec{m} := \int_E \mathbb{E}[\xi(\theta_1, x)] d\pi(x),$$

(en fait les hypothèses assureront que $\int_E \mathbb{E}\big[\, |\xi(\theta_1, x)| \,\big] d\pi(x) < +\infty$).

– *La matrice de covariance asymptotique Γ (cas $d \geq 2$), définie par*

$$– \quad \text{si } \vec{m} = 0 \ : \quad \Sigma := \lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}[S_n^* S_n], \tag{6.26a}$$

$$– \quad \text{si } \vec{m} \neq 0 \ : \quad \Sigma := \vec{m}^* \cdot \vec{m} + \lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}_\mu\big[(S_n - n\,\vec{m})^*(S_n - n\,\vec{m})\big]. \tag{6.26b}$$

Comme dans les deux chapitres précédents (et comme dans le cas i.i.d.), on définit l'ordre m_d des conditions de moment à venir de la manière suivante :

- *si $d = 1$, on pose $m_1 = 1$ et on supposera que $\int \mathbb{E}[\xi(\theta_1, x)] d\pi(x) > 0$,*
- *si $d = 2$, on pose $m_2 = 2$ et on supposera que $\vec{m} \neq 0$,*
- *si $d \geq 3$, on pose*
  – *$m_d = \max(d-2, 2)$ si $\vec{m} = 0$,*
  – *$m_d = \max(\frac{d-1}{2}, 2)$ si $\vec{m} \neq 0$.*

Les hypothèses de moment/contraction ci-dessous portent

– D'une part, sur le modèle itératif, via les fonctions $c(\cdot)$ et $M(\cdot)$ définies sur G, données en (6.3) et (6.13), dont nous rappelons ici par commodité les définitions : $\forall \theta \in G$,

$$c(\theta) := \sup_{(x,y)\in E^2,\, x\neq y} \frac{d(F_\theta x, F_\theta y)}{d(x,y)} \quad \text{et} \quad M(\theta) = \max(1, c(\theta)) + d(x_0, F_\theta x_0). \tag{6.27}$$

On utilisera aussi la fonction suivante :

$$\forall \theta \in G, \quad \widetilde{c}(\theta) := \max\big(1, c(\theta)\big).$$

– D'autre part, sur la fonction ξ, via les nombres réels $r, s \geq 0$, et les fonctions $R(\cdot)$, $S(\cdot)$ définies sur G, qui ont été introduits dans les hypothèses (6.20) (6.21). Plus précisément, on utilisera les fonctions suivantes :

$$\forall \theta \in G, \quad \widetilde{R}(\theta) := \max(1, R(\theta)) \ \text{ et } \ \widetilde{S}(\theta) := \max(1, S(\theta)).$$

Hypothèse de moment/contraction. *Soient $\delta > 0$ et $\alpha := \min(1, \dfrac{\delta}{4(s+1)})$. On suppose que pour $\Lambda \in \{0,1\}$ et tout $j = 0, \ldots, \lfloor m_d \rfloor$, on a en posant $\widehat{m}_d := m_d - \lfloor m_d \rfloor$:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{R}(\theta_1)^{j-1+\Lambda\widehat{m}_d+\delta}\widetilde{S}(\theta) + \widetilde{R}(\theta_1)^{j+\Lambda\widehat{m}_d+\delta}\widetilde{S}(\theta_1)^{\alpha}\right) M(\theta_1)^{(s+1)(m_d-\Lambda\widehat{m}_d-j)+\delta}\right] < +\infty \tag{6.28}$$

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\Lambda\widehat{m}_d+\delta}\widetilde{c}(\theta_1)^{\alpha} M(\theta_1)^{(s+1)(m_d-\Lambda\widehat{m}_d-j)+\delta}\right] < +\infty. \tag{6.29}$$

$$\mathbb{E}\big[c(\theta_1)^{\alpha}\, \widetilde{c}(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta}\big] < 1. \tag{6.30}$$

Hypothèse non-lattice. *On suppose qu'il n'existe pas de d-uplet $b \in \mathbb{R}^d$, ni de sous-groupe fermé $(H, +)$ de $(\mathbb{R}^d, +)$, $H \neq \mathbb{R}^d$, ni de sous-ensemble $A \in \mathcal{E}$, Q-absorbant, ni enfin de fonction mesurable bornée $\psi : E \to \mathbb{R}^d$ de sorte que*

$$\forall x \in A, \quad \xi(\theta_1, x) + \psi(F_{\theta_1} x) - \psi(x) \in b + H \ \ \mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Les conclusions ci-dessous correspondent aux propriétés de renouvellement du chapitre 2, exprimées dans le cadre markovien. Elles sont donc exactement les mêmes que celles présentées dans les deux chapitres précédents (cf. (4.37) (4.38) (4.39) selon la dimension et l'hypothèse de centrage ou non). Pour la commodité du lecteur, nous les détaillons à nouveau ci-dessous.

Théorème 6.1. `[Théorème de renouvellement.]`
Sous les hypothèses de moment/contraction et non-lattice précédentes, pour toute probabilité initiale μ (loi de la v.a. X_0) vérifiant

$$\mu\big(d(x_0, \cdot)^{(s+1)m_d+\delta}\big) < +\infty,$$

et pour toute fonction $f : E \to [0, +\infty[$ vérifiant

$$\sup_{(x,y)\in E^2,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\alpha}\big(1 + d(x,x_0)\big)^{\alpha(s+1)}\big(1 + d(y,x_0)\big)^{\alpha(s+1)}} < +\infty,$$

on a les résultats suivants pour tout $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$:

• *Si $d=1$ et $\pi\big(\mathbb{E}[\xi(\theta_1,\cdot)]\big)>0$, $\lim_{a\to-\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}_\mu[f(X_n)g(S_n-a)]=0$ et*

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}_\mu[f(X_n)g(S_n-a)]=\frac{\pi(f)}{\pi\big(\mathbb{E}[\xi(\theta_1,\cdot)]\big)}\int_{\mathbb{R}}g(u)du.$$

• *Si $d\geq 3$ avec $\vec{m}=0$, et si la matrice Σ donnée par (6.26a) est définie positive, alors*

$$\lim_{\|a\|\to+\infty}\langle\,\Sigma^{-1}a,a\,\rangle^{\frac{d-2}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)g(S_n-a)\big]=C(d,\Sigma)\,\pi(f)\int_{\mathbb{R}^d}g(u)du,$$

avec $C(d,\Sigma):=2^{-1}\,\pi^{-\frac{d}{2}}\,(\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\big(\frac{d-2}{2}\big)$, où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma d'Euler.

• *Si $d=2$ ou $d\geq 3$ avec $\vec{m}\neq 0$, et si la matrice Σ donnée par (6.26b) est définie positive, alors pour tout $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^d$ telle que $\Lambda:=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{a(\tau)-\tau\vec{m}}{\sqrt{\tau}}\in\mathbb{R}^d$, on a*

$$\lim_{\tau\to+\infty}(2\pi\tau)^{\frac{d-1}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)g(S_n-a(\tau))\big]=C(\vec{m},\Sigma,\Lambda)\,\pi(f)\int_{\mathbb{R}^d}g(u)du,$$

où

$$C(\vec{m},\Sigma,\Lambda)\;:=\;\frac{(\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}}{\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|}\,\exp\bigg(-\frac{\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|^2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda\|^2-\langle\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m},\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Lambda\rangle^2}{2\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}\vec{m}\|^2}\bigg).$$

La démonstration du théorème 6.1 est présentée dans la section 6.6. Elle repose sur la méthode spectrale généralisée du chapitre 5, selon la même procédure que celle utilisée pour les chaînes v-géométriquement ergodiques et les chaînes ρ-mélangeantes, mais appliquée ici avec une certaine famille d'espaces de Lipschitz à poids. La condition sur μ dans l'énoncé impliquera que μ est une forme linéaire continue sur le plus gros des espaces de la famille, tandis que la condition sur f impliquera que f est dans le plus petit des espaces. La définition précise de la famille d'espaces (cf. sous-section 6.6.3) permet d'affaiblir un peu les conditions sur μ et f. La difficulté technique supplémentaire, en comparaison avec les exemples traités au chapitre 5, résulte ici de la considération de fonctionnelles associées à la chaîne double $((\theta_k,X_{k-1}))_k$, et de la plus grande complexité des normes introduites sur ces espaces de Lipschitz à poids.

Notons qu'à l'exception du cas décentré avec d pair et $d\geq 6$, la valeur m_d est entière (donc $\widehat{m}_d=0$), et les conditions de moments (6.28) et (6.29) s'écrivent alors :

$$\mathbb{E}\bigg[\Big(\widetilde{R}(\theta_1)^{j-1+\delta}\widetilde{S}(\theta)+\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\delta}\widetilde{S}(\theta_1)^{\alpha}\Big)M(\theta_1)^{(s+1)(m_d-j)+\delta}\bigg]<+\infty.$$

$$\mathbb{E}\Big[\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\delta}\widetilde{c}(\theta_1)^{\alpha}M(\theta_1)^{(s+1)(m_d-j)+\delta}\Big]<+\infty.$$

Dans le cas décentré, avec d pair et $d\geq 6$, on a $m_d\in 1/2+\mathbb{N}$, donc $\widehat{m}_d=1/2$: les conditions de moments (6.28) et (6.29) sont alors données par les deux précédentes, auxquelles il faut ajouter les deux suivantes :

$$\mathbb{E}\bigg[\Big(\widetilde{R}(\theta_1)^{j-1+\frac{1}{2}+\delta}\widetilde{S}(\theta)+\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\frac{1}{2}+\delta}\widetilde{S}(\theta_1)^{\alpha}\Big)M(\theta_1)^{(s+1)(\lfloor m_d\rfloor-j)+\delta}\bigg]<+\infty$$

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\frac{1}{2}+\delta}\widetilde{c}(\theta_1)^{\alpha}M(\theta_1)^{(s+1)(\lfloor m_d\rfloor-j)+\delta}\right] < +\infty.$$

Les hypothèses des énoncés intermédiaires dans les preuves (section 6.6) peuvent en fait être formulées avec les fonctions $R(\cdot)$ et $S(\cdot)$. Cependant, la synthèse de toutes ces hypothèses, nécessaire pour établir le théorème 6.1, est facilitée lorsqu'on utilise $\widetilde{R}(\cdot)$ et $\widetilde{S}(\cdot)$. Mentionnons enfin qu'une condition alternative plus générale que l'hypothèse non-lattice sera présentée dans la sous-section 6.6.2.

Remarque 6.3. *Expliquons brièvement l'intérêt du paramètre β dans la définition des espaces de fonctions Lipschitz à poids. Considérons pour simplifier ξ vérifiant l'hypothèse (6.21) avec $s = 0$. Nous verrons que, sous des conditions de moment que nous ne précisons pas ici, les noyaux de Fourier associés à ξ sont de classe $\mathcal{C}^m$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{B}_{\alpha,\beta',\gamma+m/\alpha})$. Or, pour appliquer la procédure de dérivation du chapitre 5, nous devrons supposer que Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta',\gamma_m}$, où l'on a noté $\gamma_m = \gamma+m/\alpha$. Si l'on considère les espaces de fonctions Lipschitz à poids usuels $\mathcal{B}_{\alpha,\gamma,\gamma}$ et $\mathcal{B}_{\alpha,\gamma_m,\gamma_m}$, alors d'après la proposition 6.7, ceci conduit (en substance) à la condition de moment $\mathbb{E}[M(\theta_1)^{2\alpha\gamma_m}] = \mathbb{E}[M(\theta_1)^{2\alpha\gamma+2m}] < +\infty$. Même en choisissant α petit, l'exposant est de l'ordre de $2m$. Avec le paramètre β', qu'on pourra fixer dans cette étude en fonction de la constante s de (6.21), la forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta',\gamma_m}$ requiert que $\mathbb{E}[M(\theta_1)^{\alpha(\beta'+\gamma_m)}] = \mathbb{E}[M(\theta_1)^{\alpha(\beta'+\gamma)+m}] < +\infty$. L'ordre dans cette condition de moment est de la forme $m+\varepsilon$ si l'on choisit α suffisamment petit.*

6.5 Exemples d'applications.

On explicite ici les conditions de moment (6.28) et (6.29) du théorème 6.1, d'une part dans le cadre général des modèles itératifs lipschitziens en considérant des exemples typiques de fonctions $\xi(\cdot,\cdot)$, d'autre part dans le cadre spécifique des produits de transformations aléatoires topicales défini dans la sous-section 6.3.2.

6.5.1 Exemples de fonctions $\xi(\cdot,\cdot)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un modèle itératif lipschitzien. Rappelons que les définitions de $c(\theta)$ et $M(\theta)$ ont été redonnées en (6.27).

Pour simplifier, on suppose dans cette sous-section que l'on a : $c(\theta_1) < 1$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Sous cette condition, l'hypothèse de contraction (6.30) du théorème 6.1 est alors vérifiée car $\widetilde{c}(\theta_1) = 1$ $\mathbb{P}$-p.s., et par conséquent $c(\theta_1)^{\alpha}\,\widetilde{c}(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta} < 1$ $\mathbb{P}$-p.s..

Dans les trois exemples typiques suivants, nous allons voir que les conditions de moment (6.28) et (6.29) du théorème 6.1 se réduisent à une condition (presque) optimale (en comparaison avec le cas i.i.d.).

Exemple 1. *Dans cet exemple, (E,d) est l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la distance associée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^d$, et on choisit pour simplifier $x_0 = 0$. Considérons $\xi(\theta,x) := F(\theta,x)$,* *où F est la fonction introduite dans (6.1). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi(\theta_k, X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Alors les conditions de moment (6.28) et (6.29) du théorème 6.1 sont remplies si, pour un certain $e > 0$, on a :

$$\mathbb{E}\Big[\big\|F\big(0,\theta_1\big)\big\|^{m_d+e}\Big] < +\infty.$$

En effet, la fonction ξ vérifie clairement la condition (6.21) avec $s = 0$ et $S(\theta) = c(\theta)$. En outre, en utilisant la définition de $c(\theta)$ et le lemme 6.5, on a

$$\|F(\theta, x)\| \leq c(\theta)\|x\| + \|F(\theta, 0)\|,$$

de sorte que ξ vérifie la condition (6.20) avec $r = 1$, et avec (à une constante mulitiplicative près) : $R(\theta) = M(\theta) := \max(1, c(\theta)) + \|F(\theta, 0)\|$. La condition (6.28) (avec $m_d \in \mathbb{N}$) est donc satisfaite s'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait avec $\Lambda \in \{0, 1\}$:

$$\forall j = 0, \ldots, \lfloor m_d \rfloor, \quad \mathbb{E}\Big[\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\delta} M(\theta_1)^{m_d-j+\delta}\Big] < +\infty,$$

c'est-à-dire s'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[M(\theta_1)^{m_d+2\delta}] < +\infty$. Et, sous cette dernière dernière condition, l'hypothèse (6.29) est aussi satisfaite. Le cas $m_d \in 1/2 + \mathbb{N}$ conduit à la même condition de moment.

Exemple 2. *Dans cet exemple, $(E, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Considérons $\xi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\xi(\theta, x) := F(\theta, x)^2$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi(\theta_k, X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Alors les conditions de moment (6.28) et (6.29) du théorème 6.1 sont remplies si, pour un certain $e > 0$, on a :

$$\mathbb{E}\Big[\big|F\big(0,\theta_1\big)\big|^{2+e}\Big] < +\infty.$$

(On a encore choisi $x_0 = 0$ pour simplifier.) En effet, la fonction ξ vérifie la condition (6.20) avec $r = 2$ et, à une constante multiplicative près, $R(\theta) = M(\theta)^2$ (voir l'exemple précédent). En outre, ξ vérifie la condition (6.21) avec $s = 1$, et avec $S(\theta) = 2\, c_1(\theta)\, M(\theta)$ car

$$\begin{aligned} |F(\theta, x)^2 - F(\theta, y)^2| &= |F(\theta, x) - F(\theta, y)||F(\theta, x) + F(\theta, y)| \\ &\leq 2\, c_1(\theta)\, M(\theta)\, |x - y| \big(1 + |x| + |y|\big). \end{aligned}$$

Rappelons que, en dimension $d = 1$, la constante m_1 du théorème 6.1 est égale à 1. L'hypothèse (6.28) est donc satisfaite s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $j \in \{0, 1\}$, on ait :

$$\mathbb{E}\Big[\big(M(\theta_1)^{2(j-1+\delta)+1} + M(\theta_1)^{2(j+\delta)+\delta}\big) M(\theta_1)^{2(1-j)+\delta}\Big] < +\infty,$$

c'est-à-dire si $\mathbb{E}[M(\theta_1)^{2+4\delta}] < +\infty$. Cette dernière condition implique aussi (6.29).

Exemple 3. *Dans cet exemple,* $(E, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ *et* $G = \mathbb{R}^2$*. Soit* X_0 *une v.a. réelle et soit* $(\theta_n) = ((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.i.i.d, à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*, indépendante de* X_0*. On suppose que* $|a_1| < 1$ $\mathbb{P}-$*p.s., et on considère le modèle autorégressif réel défini par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n := a_n X_{n-1} + b_n.$$

Considérons $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$ *par :* $\xi\big((a, b), x\big) = ax^2 + bx$*. On a :*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi(\theta_k, X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}X_k.$$

Les conditions de moment (6.28) (6.29) du théorème 6.1 sont remplies s'il existe $e > 0$ *tel que*

$$\mathbb{E}\big[|b_1|^{2+e}\big] < +\infty.$$

En effet, le modèle itératif lipschitzien considéré ici est associé à la fonction $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $F((a, b), x) = ax + b$. Pour tout $\theta = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'application $x \mapsto F(\theta, x)$ est clairement une application lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $c_1(\theta) = |a|$. La fonction ξ vérifie la condition (6.20) avec $x_0 = 0$, $r = 2$ et $R(\theta) = (1 + |a|)(1 + |b|)$ car

$$\begin{aligned} |\xi((a, b), x)| &\leq |a|x^2 + |b||x| \\ &\leq (1 + |a|)(1 + |b|)(x^2 + |x|) \\ &\leq (1 + |a|)(1 + |b|)(1 + |x|)^2. \end{aligned}$$

Elle vérifie la condition (6.21) avec $x_0 = 0$, $s = 1$ et $S(\theta) = (1 + |a|)(1 + |b|)$ car

$$\begin{aligned} \big|\xi((a, b), x) - \xi((a, b), y)\big| &= \big|a(x^2 - y^2) + b(x - y)\big| \\ &= \big|\big(a(x + y) + b\big)(x - y)\big| \\ &\leq \big(|a|(|x| + |y|) + |b|\big)\, |x - y| \\ &\leq (1 + |a|)(1 + |b|)\, |x - y| \,\big(1 + |x| + |y|\big). \end{aligned}$$

En outre, on a $M((a, b)) = \max(1, c_1(a, b)) + |F((a, b), 0)| = \max(1, |a|) + |b|$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\widetilde{R}(\theta_1) = \widetilde{S}(\theta_1) \leq 2(1 + |b_1|) \quad \text{et} \quad M(\theta_1) \leq 1 + |b_1|.$$

Comme $d = 1$, la constante m_1 du théorème 6.1 est égale à 1, et la condition (6.28) est satisfaite s'il existe $\delta > 0$ tel que pour $j \in \{0, 1\}$, on ait :

$$\mathbb{E}\left[\big((1 + |b_1|)^{j+\delta} + (1 + |b_1|)^{j+2\delta}\big)(1 + |b_1|)^{2(1-j)+\delta}\right] < +\infty,$$

donc si $\mathbb{E}[M(\theta_1)^{2+3\delta}] < +\infty$. Cette dernière condition implique aussi (6.29).

6.5.2 Applications aux produits de transformations aléatoires topicales.

Commençons par préciser les définitions et les notations introduites dans la sous-section 6.3.2. Soient p et $q \in \mathbb{N}^*$. On note $T(p,q)$ l'ensemble des applications topicales de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Rappelons que $B \in T(p,q)$ si

$$\forall x \in \mathbb{R}^p,\, \forall c \in \mathbb{R}, \quad B(x + c\mathbf{1_p}) = B(x) + c\,\mathbf{1_q} \tag{6.31}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \quad x \leq_p y \Rightarrow B(x) \leq_q B(y), \tag{6.32}$$

où $\mathbf{1_p}$ (resp. $\mathbf{1_q}$) désigne le vecteur de $\mathbb{R}^p$ (resp. de $\mathbb{R}^q$) dont toutes les composantes valent 1, et où $\leq_p$ (resp. $\leq_p$) désigne la relation d'ordre canonique dans $\mathbb{R}^p$ (resp. dans $\mathbb{R}^q$). Si $p = q$, on note simplement $T(p) = T(p,p)$.

Désormais, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{X}_p$ l'espace quotient $\mathbb{R}^p/\mathcal{R}_p$ où $\mathcal{R}_p$ est la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{R}^p$:

$$x\,\mathcal{R}_p\,y \;\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R} \cdot \mathbf{1_p}.$$

L'ensemble $\mathbb{X}_p$ est muni de la distance $d(\cdot,\cdot)$ suivante :

$$\forall (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{X}_p^2, \quad d(\bar{x},\bar{y}) := \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i) - \min_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i).$$

Comme $\mathbb{X}_p$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{p-1}$, l'espace métrique $(\mathbb{X}_p, d)$ est complet. Rappelons que pour tout $A \in T(p)$, on note $\overline{A}$ l'application définie sur $\mathbb{X}_p$ par : $\forall \bar{x} \in \mathbb{X}_p,\ \overline{A}(\bar{x}) = \overline{A(x)}$. On définit enfin l'ensemble

$$\overline{T(p)} := \{\overline{A},\, A \in T(p)\}.$$

On a vu dans la sous-section 6.3.2 que l'étude des produits de transformations aléatoires topicales peut être faite à l'aide de fonctionnelles additives associées à un modèle itératif défini à partir de l'espace métrique $E = \mathbb{X}_p$ et de l'ensemble de transformations $G = \overline{T(p)}$. Avant de revenir sur ce point, et d'étudier dans ce cadre les conditions de moment du théorème 6.1, vérifions que les éléments de $\overline{T(p)}$ sont des applications lipschitziennes de l'espace $(\mathbb{X}_p, d)$.

Lemme 6.7. *Soit $\overline{A} \in \overline{T(p)}$. On a :*

$$\forall (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{X}_p \times \mathbb{X}_p, \quad d\big(\overline{A}(\bar{x}), \overline{A}(\bar{y})\big) \leq d(\bar{x},\bar{y}). \tag{6.33}$$

Démonstration. Il est évident que

$$x \leq_p y + \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p}.$$

En utilisant alors (6.31) et (6.32) avec $B = A$, on a :

$$A(x) \leq_p A(y) + \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p},$$

donc

$$A(x) - A(y) \leq_p \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p},$$

et en particulier

$$\max_{i=1,\dots,p}(A(x)_i - A(y)_i) \leq_p \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i).$$

De même, en échangeant le rôle de x et de y, on obtient :

$$-\min_{i=1,\dots,p}(A(x)_i - A(y)_i) \leq -\min_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i).$$

L'inégalité cherchée se déduit alors par addition des deux dernières inégalités. □

Ainsi, avec $(E,d) = (\mathbb{X}_p, d)$ et $G = \overline{T(p)}$, les fonctions $c(\cdot)$ et $M(\cdot)$ (cf (6.27)) vérifient ici :

- $\forall \overline{A} \in \overline{T(p)},\ c(\overline{A}) \leq 1$ (d'après le lemme précédent),
- $\forall \bar{A} \in \overline{T(p)},\quad M(\bar{A}) = 1 + d(\bar{A}(0), \bar{0})$ (en posant $x_0 = \bar{0}$).

Lemme 6.8. *On a :* $\forall \bar{A} \in \overline{T(p)},\quad M(\bar{A}) \leq 1 + 2\max_{i=1,\dots,p}|A(0)_i|$.

Démonstration. On a pour tout $\bar{A} \in \overline{T(p)}$: $d(\bar{A}(\bar{0}), \bar{0}) = \max_{i=1,\dots,p} A(0)_i - \min_{i=1,\dots,p} A(0)_i$, d'où l'inégalité du lemme. □

Comme déjà remarqué dans la sous-section 6.3.2, à toute fonction $\phi \in T(p,1)$, on peut associer la fonction $\xi : \overline{T(p)} \times \mathbb{X}_p \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (\bar{A}, \bar{x}) \in \overline{T(p)} \times \mathbb{X}_p,\quad \xi(\bar{A}, \bar{x}) := \phi(A(x)) - \phi(x). \tag{6.34}$$

(car $x \mathcal{R}_p y \;\Rightarrow\; \phi(A(x)) - \phi(x) = \phi(A(y)) - \phi(y)$). Étudions les conditions (6.20) et (6.21) pour une telle fonction ξ.

Lemme 6.9. *Soit $\phi \in T(p,1)$. Alors La fonction ξ définie par (6.34) vérifie :*

(i) la condition (6.21) avec $s = 0$ et : $\forall \overline{A} \in \overline{T(p)},\ S(\bar{A}) = 1$,

(ii) la condition (6.20) avec $r = 1$, et avec pour tout $\overline{A} \in \overline{T(p)}$:

$$R(\bar{A}) \;=\; 1 + |\phi(A(0)) - \phi(0)| \;\leq\; 1 + \max_{i=1,\dots,p}|A(0)_i|. \tag{6.35}$$

Démonstration. Pour établir (i), nous devons montrer que

$$\forall \overline{A} \in \overline{T(p)},\ \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{X}_p \times \mathbb{X}_p,\quad \left|\xi(\bar{A}, \bar{x}) - \xi(\bar{A}, \bar{y})\right| \leq d(\bar{x}, \bar{y}). \tag{6.36}$$

Partons de la double inégalité évidente suivante :

$$y + \min_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p} \leq_p x \leq_p y + \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p}.$$

En utilisant (6.31) et (6.32) avec $B = \phi$, on obtient :

$$\phi(y) + \min_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i) \leq \phi(x) \leq \phi(y) + \max_{i=1,\dots,p}(x_i - y_i),$$

donc
$$\min_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i) \leq \phi(x) - \phi(y) \leq \max_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i).$$
De même, en utilisant (6.31) et (6.32) avec $B = A$, puis avec $B = \phi$, on a aussi :
$$A(y) + \min_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p} \leq_p A(x) \leq_p A(y) + \max_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i)\mathbf{1_p},$$
puis
$$\phi(A(y)) + \min_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i) \leq \phi(A(x)) \leq \phi(A(y)) + \max_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i),$$
c'est-à-dire
$$\min_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i) \leq \phi(A(x)) - \phi(A(y)) \leq \max_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i).$$
D'où
$$\big|(\phi(A(x)) - \phi(x)) - (\phi(A(y)) - \phi(y))\big| \leq \max_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i) - \min_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i),$$
ce qui démontre bien (6.36).
L'assertion (ii) découle de (i). En effet, la propriété (6.36), appliquée avec $\bar{y} = \bar{0}$, donne pour tout $\overline{A} \in \overline{T(p)}$:
$$\forall \bar{x} \in \mathbb{X}_p, \quad |\xi(\bar{A}, \bar{x})| \leq |\xi(\bar{A}, \bar{0})| + d(\bar{x}, \bar{0}) \leq \big(1 + |\xi(\bar{A}, \bar{0})|\big)\,\big(1 + d(\bar{x}, \bar{0})\big),$$
ce qui démontre l'égalité dans (6.35) par définition de ξ. En outre, comme $\phi \in T(p, 1)$, on a vu ci-desssus que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\phi(x) \leq \phi(y) + \max_{i=1,\ldots,p}(x_i - y_i)$, et a fortiori $\phi(x) - \phi(y) \leq \max_{i=1,\ldots,p}|x_i - y_i|$. En échangeant le rôle de x et de y, on obtient que
$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \max_{i=1,\ldots,p}|x_i - y_i|,$$
et cette inégalité, appliquée avec $x = A(0)$ et $y = 0$, donne bien celle de (6.35). □

Considérons maintenant une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de v.a.i.i.d. à valeurs dans $T(p)$, puis définissons $P_0 = Id_{\mathbb{R}^p}$ (l'identité sur $\mathbb{R}^p$) et
$$\forall n \geq 1, \quad P_n := A_n \circ \cdots \circ A_1.$$
Soit $\phi \in T(p, 1)$, puis ξ définie par (6.34). On a vu dans la sous-section 6.3.2 (cf (6.25)) que :
$$\forall e_0 \in \mathbb{R}^p, \quad \phi(P_n(e_0)) - \phi(e_0) = \sum_{k=1}^{n} \xi\big(A_k, \overline{P_{k-1}(e_0)}\big).$$
Le théorème 6.1 permet donc de démontrer des propriétés de renouvellement pour la suite $(\phi(P_n(e_0)))_n$, à condition bien sûr de vérifier, d'une part la condition de contraction (6.30) qui met en jeu la loi commune des v.a. $\overline{A}_k$, d'autre part les conditions de moment (6.28) (6.29) et la condition non-lattice, qui concernent la fonction ξ. Nous renvoyons à [61] pour l'étude de la condition de contraction (6.30) et de l'hypothèse non-lattice, et nous examinons ici uniquement les conditions (6.28) et (6.29).

Comme ξ est à valeur réelles, la constante m_1 du théorème 6.1 est ici égale à 1. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^p$, par exemple $\|x\| = \max_{i=1,\ldots,p}|x_i|$. Alors :

Proposition 6.8. *Les conditions de moment (6.28) et (6.29) du théorème 6.1 sont remplies s'il existe $e > 0$ tel que*
$$\mathbb{E}\big[\|A_1(0)\|^{1+e}\big] < +\infty.$$

Démonstration. Des lemmes 6.8 et 6.9, on déduit que la condition (6.28) est satisfaite s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $j \in \{0, 1\}$, on ait :

$$\mathbb{E}\left[\big(1 + \max_{i=1,\dots,p} |A_1(0)_i|\big)^{j+\delta}\big(1 + 2\max_{i=1,\dots,p} |A_1(0)_i|\big)^{1-j+\delta}\right] < +\infty,$$

c'est-à-dire si $\mathbb{E}[\|A_1(0)\|^{1+2\delta}] < +\infty$. De même, sous cette dernière condition, on a (6.29) car pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\overline{A_1(\omega)} \in T(p)$, par conséquent $c(\overline{A_1(\omega)}) \leq 1$ d'après (6.33), et $\widetilde{c}(\overline{A_1(\omega)}) := \max(1, c(\overline{A_1(\omega)})) \leq 1$. □

L'ordre $1 + e$ dans la condition de moment ci-dessus (avec $e > 0$ arbitrairement petit) est presque optimal en comparaison avec le théorème de renouvellement du cas indépendant.

Plus généralement, sous la condition de contraction (6.30) (cf [61]) et sous la condition $\mathbb{E}\big[\|A_1(0)\|^{m+e}\big] < +\infty$, avec $m \in \mathbb{R}_+^*$ donné et $e > 0$ arbitrairement petit, on peut démontrer en utilisant les résultats de ce chapitre que les hypothèses du corollaire 5.2 (page 143) sont satisfaites vis-à-vis d'une famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in [a, \widetilde{\gamma}]\}$ d'espaces de fonctions Lipschitz à poids définies ici sur l'espace métrique $E = \mathbb{X}_p$. On renvoie à la sous-section 6.6.3 pour la définition exacte de α, a et $\widetilde{\gamma}$ en fonction de m et e, mais on peut ici juste retenir que, d'une part la fonction $1_{\mathbb{X}_p}$ identiquement égale à 1 sur $\mathbb{X}_p$ est dans $\mathcal{B}_{\alpha,a,a}$, et que toute distribution de Dirac $\delta_{\bar{x}}$ de $\bar{x} \in \mathbb{X}_p$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}_{\alpha,a,\widetilde{\gamma}}$. Par conséquent, d'après le corollaire 5.2, on a pour tout $e_0 \in \mathbb{R}^p$, pour tout réel t dans un certain voisinage I_0 de 0, et enfin pour tout $n \geq 1$:

$$e^{-it\phi(e_0))}\,\mathbb{E}\big[e^{it\phi(P_n(e_0))}\big] = \mathbb{E}\big[e^{it\sum_{k=1}^{n}\xi(A_k,\overline{P}_{k-1}(\bar{e}_0))}\big] = \lambda(t)^n\,L(t) + R_n(t),$$

avec des fonctions $\lambda(\cdot)$, $L(\cdot)$ et $R_n(\cdot)$ de classe C^m de I_0 dans $\mathbb{C}$, telles que $\lambda(0) = 1$, $L(0) = 1$ et $\sup_{t\in I_0} |R_n^{\ell}(t)| = O(\kappa^n)$ pour un certain réel $0 < \kappa < 1$. Ces propriétés permettent alors d'établir les raffinements usuels du théorème central limite pour la suite de v.a. $(\phi(P_n(e_0)))_n$ (en supposant en outre la condition non-lattice pour certains de ces théorèmes). Cette étude a été faite dans [61] sous la condition de moment $\mathbb{E}\big[\|A_1(0)\|^{2m+e}\big] < +\infty$, où m est l'ordre attendu (celui du cas indépendant), par exemple $m = 3$ pour le théorème de Berry-Esseen. La nouvelle définition des espaces à poids présentée dans la sous-section 6.2.1 (avec le paramètre β) permet d'obtenir les théorèmes limites de [61] sous la condition de moment (presque) optimale $\mathbb{E}\big[\|A_1(0)\|^{m+e}\big] < +\infty$.

6.6 Démonstration du théorème 6.1.

Les conclusions du théorème 6.1 correspondent aux propriétés (4.37) (4.38) (4.39) introduites au chapitre 4, qui sont la traduction dans le cadre markovien des conclusions des théorèmes de renouvellement établis dans le chapitre 2 sous l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$, avec m_d défini selon la dimension d et selon que la marche aléatoire est centrée ou non. Comme dans les exemples traités dans la section 5.6 du chapitre 5, pour vérifier l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$, on va appliquer la méthode spectrale généralisée. Commençons par définir les noyaux de Fourier.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On pose, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,

$$\big(Q(t)f\big)(x) = \mathbb{E}\big[e^{i\langle t,\, \xi(\theta_1,x)\rangle} f(F_{\theta_1}x)\big] = \int_G e^{i\langle t,\, \xi(\theta,x)\rangle} f(F_\theta x)\, d\mathbb{P}_{\theta_1}(\theta). \tag{6.37}$$

Notons que ces noyaux de Fourier ne correspondent pas à ceux associés directement à la chaîne de Markov $((\theta_k, X_{k-1}))_k$ (d'espace d'états $G \times E$) et à la fonction ξ. Ces derniers n'ont pas d'intérêt (a priori) pour la méthode spectrale car ils sont associés à la probabilité de transition de $((\theta_k, X_{k-1}))_k$, dont l'action sur les fonctions $f : G \times E \to \mathbb{C}$ ne possède pas (a priori) de bonnes propriétés spectrales. Les opérateurs de Fourier $Q(t)$ définis ci-dessus sont eux associés à l'opérateur de transition $Q = Q(0)$ du modèle itératif $(X_k)_k$, qui est fortement ergodique sur les espaces de fonctions Lipschitz à poids sous certaines hypothèses de moment/contraction (cf section 6.2.3). En outre ils jouent le même rôle que dans les deux chapitres précédents, comme le montre le lemme suivant qui est l'analogue du lemme 4.3.

Lemme 6.10. *Soit μ la loi de X_0 et soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Alors :*

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \mathbb{R}^d,\quad \mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)e^{i\langle\, t,\, S_n\,\rangle}\big] = \mu(Q(t)^n f). \tag{6.38}$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur n. L'égalité est immédiate pour $n = 1$ par définition de X_1, S_1 et (6.37) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu[f(X_1)e^{i\langle\, t,\, S_1\,\rangle}] &= \mathbb{E}_\mu[f(F_{\theta_1}X_0)e^{i\langle\, t, \xi(\theta_1,X_0)\,\rangle}] \\
&= \mathbb{E}_\mu[(Q(t)f)(X_0)] \\
&= \mu(Q(t)f).
\end{aligned}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons (6.38) vrai pour $n-1$. Par hypothèse, les v.a. $(X_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ et θ_n sont indépendantes, et les v.a. θ_n et θ_1 ont la même loi. Comme S_{n-1} et X_{n-1} sont fonctions de X_0, θ_1, …, θ_{n-1}, on a donc d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu\big[f(X_n)e^{i\langle\, t,\, S_n\,\rangle}\big] &= \mathbb{E}_\mu\big[f(F_{\theta_n}X_{n-1})e^{i\langle\, t,\, S_{n-1}\,\rangle}e^{i\langle\, t,\, \xi(\theta_n,\, X_{n-1})\,\rangle}\big] \\
&= \mathbb{E}_\mu\left[e^{i\langle\, t,\, S_{n-1}\,\rangle}\int_G f\big(F_\theta X_{n-1}\big)e^{i\langle\, t,\, \xi(\theta,X_{n-1})\,\rangle}d\mathbb{P}_{\theta_1}(\theta)\right] \\
&= \mathbb{E}_\mu\big[(Q(t)f)(X_{n-1})\, e^{i\langle\, t,\, S_{n-1}\,\rangle}\big] \\
&= \mu\big(Q(t)^{n-1}(Q(t)f)\big) \\
&= \mu(Q(t)^n f),
\end{aligned}$$

et donc (6.38) est vrai pour n. $\square$

On va appliquer les corollaires 5.2 et 5.3 (pages 143 et 144) pour vérifier l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m_d+\varepsilon)$ du chapitre 2. On présente ci-dessous les résultats intermédiaires, qui seront détaillés et établis dans les sous-sections qui suivent, permettant d'appliquer ces deux corollaires.

Dans la sous-section 6.6.3, on définira deux nombres réels a et $\widetilde{\gamma}$ tels que

$$s+1 < a < \widetilde{\gamma} \quad \text{et} \quad \alpha(\widetilde{\gamma}+1) \leq (s+1)m_d + \delta, \tag{6.39}$$

où s est la constante de l'hypothèse (6.21), et où $\delta > 0$ et $\alpha \in]0,1]$ sont les constantes données dans les hypothèses du théorème 6.1. La famille d'espaces considérée ici sera $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$, avec $I = [a, \widetilde{\gamma}]$. Rappelons que les espaces de fonctions Lipschitz à poids $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ ont été introduits dans la sous-section 6.2.1.

(a) Dans la sous-section 6.6.1, on présentera les conditions de moment/contraction sous lesquelles les noyaux de Fourier $Q(t)$ opèrent continûment sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$, et vérifient sur cet espace les hypothèses du théorème de Keller et Liverani. Ces résultats montreront que :

    Résultat A. *Sous les conditions (6.28) (6.29) (6.30), l'hypothèse $\mathcal{U}(\Theta)$ (page 143) est vérifiée relativement à la famille d'espaces $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$, et les hypothèses des propositions 5.2 et 5.3 (pages 128 et 132) sont satisfaites sur chacun des espaces de cette famille.*

(b) Dans la sous-section 6.6.2, on démontrera que les noyaux de Fourier $Q(t)$ vérifient l'hypothèse (RS) (page 133) sur chacun des espaces de la famille précédente, et en appliquant le corollaire 5.1 (page 133), on démontrera que :

    Résultat B. *Sous les conditions (6.28) (6.29) (6.30), la condition non-lattice du théorème 6.1 implique que l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA) (p. 132) est satisfaite sur chaque espace de la famille précédente.*

(c) Dans la sous-section 6.6.3, pour $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque, on présentera les conditions de moment/contraction sous lesquelles les noyaux de Fourier vérifient l'hypothèse $\mathcal{D}(\eta+\varepsilon)$ du chapitre 5 (page 135). Cette étude montrera que :

    Résultat C. *Sous les conditions (6.28) et (6.29), l'hypothèse $\mathcal{D}(m_d+\varepsilon_0)$ est satisfaite, avec un certain $\varepsilon_0 > 0$, pour tout ouvert borné $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^d$ et relativement à la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$.*

Admettons provisoirement les résultats A, B et C.

Preuve du théorème 6.1. En utilisant la définition (6.7) et l'inégalité $\alpha(\widetilde{\gamma}+1) \leq (s+1)m_d+\delta$, il est facile de voir que l'hypothèse sur la probabilité initiale μ dans le théorème 6.1 implique que μ est une forme linéaire continue sur $\widetilde{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_{\alpha,a,\widetilde{\gamma}}$ (le plus gros des espaces de la famille ci-dessus). En utilisant le fait que $s+1 < a$, la condition sur la fonction f fixée dans le théorème 6.1 implique que $f \in \mathcal{B}_a := \mathcal{B}_{\alpha,a,a}$ (le plus petit espace de cette famille). Comme conséquence du corollaire 5.2 (page 143) et des résultats A et C ci-dessus, l'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(i)$ est satisfaite avec $L(0) = \pi(f)$. L'hypothèse $\mathcal{R}_d(m)(ii)$ est vérifiée comme conséquence du corollaire 5.3 (page 144) et des résultats B et C. □

Les trois sous-sections suivantes sont consacrées à la preuves des résultats A, B et C.

6.6.1 Action des noyaux de Fourier sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et vérification des hypothèses du théorème de Keller et Liverani.

Avant d'établir le résultat A, nous démontrons un lemme pour lequel on définit (a priori dans $[0,+\infty]$) les quantités suivantes :

$$D := \mathbb{E}\big[M(\theta_1)^{\alpha(\gamma'+1)}\big], \quad A := \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^{\alpha} M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\big], \quad B := \mathbb{E}\big[S(\theta_1)^{\alpha} M(\theta_1)^{\alpha(\gamma'+1)}\big],$$

avec $\lambda \in]0,1]$, $\alpha \in]0,1]$, et β, γ, γ' tels que $0 < \beta \leq \gamma \leq \gamma'$, et où $c(\cdot)$ et $M(\cdot)$ sont les fonctions sur G dont les définitions sont rappelées dans (6.27), et où enfin $M_\lambda(\cdot)$ est la fonction sur G définie en (6.13). Notons que $M_\lambda(\cdot) \leq M(\cdot)$. Les normes utilisées ci-dessous ont été définies dans la section 6.2.

Lemme 6.11. *On a les propriétés suivantes :*

(i) Pour tous $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et $t \in \mathbb{R}^d$:

$$|Q(t)f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'} \leq D\,|f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'}. \tag{6.40}$$

(ii) Si $s+1 < \beta \leq \gamma \leq \gamma' \leq \gamma + \beta - (s+1)$, avec s donné dans l'hypothèse (6.21), alors on a pour tous $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et $t \in \mathbb{R}^d$:

$$m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}\big(Q(t)f\big) \leq A\, m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) \;+\; 2\,(\frac{2}{\lambda})^s\,|t|^\alpha\, B\,|f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'}. \tag{6.41}$$

Démonstration. Rappelons que, pour $g : E \to \mathbb{C}$, on a noté :

$$|g|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'} := \sup_{x\in E} \frac{|g(x)|}{p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+1)}} < +\infty.$$

Soit $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$. En utilisant le lemme 6.5 (page 174), on obtient

$$|(Q(t)f)(x)| \leq \mathbb{E}[\,|f(F_{\theta_1}x)|\,] \leq |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'}\, \mathbb{E}[\,M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\gamma'+1)}\,]\,p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+1)},$$

ce qui démontre (6.40). Soit maintenant $(x,y) \in E^2$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$:

$$Q(t)f(x) - Q(t)f(y) = \mathbb{E}\Big[e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,x)\,\rangle} f(F_{\theta_1}x) - e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,y)\,\rangle} f(F_{\theta_1}y)\Big].$$

En écrivant l'expression $e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,x)\,\rangle} f(F_{\theta_1}x) - e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,y)\,\rangle} f(F_{\theta_1}y)$ sous la forme

$$e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,x)\,\rangle}\bigg(f(F_{\theta_1}x) - f(F_{\theta_1}y)\bigg) - \bigg(e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,x)\,\rangle} - e^{i\langle\, t,\,\xi(\theta_1,y)\,\rangle}\bigg) f(F_{\theta_1}y),$$

et en utilisant l'inégalité $|e^{ic}-1| \leq 2|c|^\alpha$ ($c \in \mathbb{R}$), il vient

$$\big|Q(t)f(x) - Q(t)f(y)\big| \leq \mathbb{E}\big[|f(F_{\theta_1}x) - f(F_{\theta_1}y)|\big] + 2\|t\|^\alpha \mathbb{E}\big[\|\xi(\theta_1,x) - \xi(\theta_1,y)\|^\alpha |f(F_{\theta_1}y)|\big].$$

On peut supposer $d(x_0,y) \leq d(x_0,x)$. Rappelons que $p(\cdot) \leq \frac{1}{\lambda}p_\lambda(\cdot)$. Des hypothèses sur ξ (cf (6.21)), il vient que

$$\|\xi(\theta_1,x) - \xi(\theta_1,y)\| \leq S(\theta_1)d(x,y)(1+2p(x))^s \leq (\frac{2}{\lambda})^s S(\theta_1)d(x,y)p_\lambda(x)^s.$$

En utilisant la définition de $m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f)$, le lemme 6.5 et les inégalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
|Q(t)f(x) - Q(t)f(y)| &\leq m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, d(x,y)^\alpha\, \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y)\, \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^\alpha M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\big] \\
&\quad +\; 2\,(\frac{2}{\lambda})^s\,\|t\|^\alpha\,|f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'}\, d(x,y)^\alpha\, p_\lambda(x)^{\alpha s} p_\lambda(y)^{\alpha(\gamma'+1)}\, \mathbb{E}\big[S(\theta_1)^\alpha M_\lambda(\theta_1)^{\alpha(\gamma'+1)}\big] \\
&\leq A\, m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, d(x,y)^\alpha\, \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \\
&\qquad +\; 2\,(\frac{2}{\lambda})^s\,\|t\|^\alpha\, B\,|f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'} d(x,y)^\alpha p_\lambda(x)^{\alpha s} p_\lambda(y)^{\alpha(\gamma'+1-\beta)} p_\lambda(y)^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Or comme $d(x_0, y) \leq d(x_0, x)$, on a

$$p_\lambda(x)^{\alpha s}\, p_\lambda(y)^{\alpha(\gamma'+1-\beta)} p_\lambda(y)^{\alpha\beta} \leq p_\lambda(x)^{\alpha(\gamma'+s+1-\beta)} p_\lambda(y)^{\alpha\beta} \leq p_\lambda(x)^{\alpha\gamma} p_\lambda(y)^{\alpha\beta} \leq \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y).$$

D'où, si $x \neq y$,

$$\frac{|Q(t)f(x) - Q(t)f(y)|}{d(x,y)^\alpha\, \Delta^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y)} \leq A\, m^{(\lambda)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + 2\,(\frac{2}{\lambda})^s\, \|t\|^\alpha\, B\, |f|^{(\lambda)}_{\alpha,\gamma'},$$

ce qui démontre la seconde propriété du lemme. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat A. On suppose que les conditions (6.28) (6.29) (6.30) du théorème 6.1 sont satisfaites. Il n'est pas utile ici de définir précisément les réels α, a, et le segment I, intervenant dans la définition de la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$ d'espaces de fonctions Lipschitz à poids (ce travail sera fait dans la sous-section 6.6.3). Signalons uniquement pour le moment que $0 < \alpha \leq \delta$, et que $I = [a, \widetilde{\gamma}]$ avec

$$a > s+1 \quad \text{et} \quad \alpha(a + \widetilde{\gamma}) \leq (s+1)m_d + \delta, \tag{6.42}$$

où $\delta > 0$ est le nombre introduit dans les hypothèses du théorème 6.1. Par commodité, on détaille ci-dessous toutes les propriétés du résultat A :

Proposition 6.9. *Soient $\gamma \in I = [a, \widetilde{\gamma}]$, et $\gamma' = \gamma + a - (s+1)$. Alors :*

(i) Il existe une unique probabilité Q-invariante, notée π, et on a $\pi(p^{(s+1)m_d+\delta}) < +\infty$. L'espace $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ contient la fonction 1_E, et s'injecte continûment dans $\mathcal{L}^1(\pi)$;

(ii) Q est fortement ergodique sur $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$;

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a $Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma})$;

(iv) Il existe une constante $\tilde{c} > 0$ telle que pour tous $f \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ et $t \in \mathbb{R}^d$, on ait :

$$|Q(t)f|_{\alpha,\gamma'} \leq \tilde{c}\, |f|_{\alpha,\gamma'}.$$

(v) Soit $t_0 \in \mathbb{R}^d$. Il existe un voisinage ouvert $I(t_0)$ de t_0 et des constantes $A_0 \in]0,1[$ et $c_1 > 0$ (indépendantes de t_0) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $M_n(t_0) > 0$ de sorte que l'on ait pour tous $t \in I(t_0)$ et $f \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$:

$$\|Q(t)^n f\|_{\alpha,a,\gamma,\gamma'} \leq c_1\, A_0^n\, \|f\|_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} + c_1\, M_n(t_0)\, |f|_{\alpha,\gamma'}. \tag{6.43}$$

(vi) Avec $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}) = \big(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \|\cdot\|_{\alpha,a,\gamma,\gamma'}\big)$ et $(\mathcal{B}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_1}) = \big(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \|\cdot\|_{\alpha,\gamma'}\big)$, on a :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \to t_0} \|Q(t) - Q(t_0)\|_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = 0,$$

et enfin il existe $d > 0$ telle que : $\forall f \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma},\ \|f\|_{\alpha,\gamma'} \leq d\,\pi(|f|)$ (i. e. $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{L}^1(\pi)$).

Démonstration. Comme les fonctions $\widetilde{R}(\cdot)$, $\widetilde{S}(\cdot)$ et $M(\cdot)$ sont à valeurs dans $[1, +\infty[$, les hypothèses (6.28) (6.29) (6.30) impliquent que $\mathbb{E}\big[M(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta}\big] < +\infty$. De même, comme $0 < \alpha \leq \delta$ et $\widetilde{c}(\cdot) \geq 1$, on a d'après (6.30)

$$\mathbb{E}\big[c(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta}\big] \leq \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^\alpha\, \widetilde{c}(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta-\alpha}\big] \leq \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^\alpha\, \widetilde{c}(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta}\big] < 1.$$

Le premier point de (i) résulte donc de la proposition 6.1. Dans la suite de cette preuve, on considère $\gamma \in [a, \widetilde{\gamma}]$. Notons que (6.42) donne :

$$\alpha(\gamma+1) \leq \alpha(a+\gamma) \leq \alpha(a+\widetilde{\gamma}) \leq (s+1)m_d + \delta. \tag{6.44}$$

Le fait que $1_E \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ est évident. Pour établir le dernier point de (i), notons qu'on a d'après (6.7) pour tout $f \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$: $|f| \leq |f|_{\alpha,\gamma}\, p^{\alpha(\gamma+1)}$, d'où $\pi(|f|) \leq |f|_{\alpha,\gamma}\, \pi(p^{\alpha(\gamma+1)})$, ce qui démontre que $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma} \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\pi)$ car $p^{\alpha(\gamma+1)} \leq \pi(p^{(s+1)m_d+\delta}) < +\infty$.

L'assertion (ii) découle de l'étude de la forte ergodicité de Q faite dans la proposition 6.7 (page 173) : utiliser (6.44) et $\alpha \leq \delta$ pour montrer que les conditions (6.28) (6.29) (6.30) impliquent celles de la proposition 6.7 appliquée avec $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$.

L'assertion (iii) résulte du lemme 6.11 appliqué avec $\lambda = 1$, $\beta = a$ et $\gamma' = \gamma$: utiliser (6.44) et $\alpha \leq \delta$ pour montrer que les espérances D, A et B du lemme 6.11 sont finies.

Pour (iv), notons que la définition de γ' et l'inégalité (6.44), donnent

$$\alpha(\gamma'+1) \leq \alpha(\gamma+a) \leq \alpha(\widetilde{\gamma}+a) \leq (s+1)m_d + \delta.$$

D'après la propriété (6.40) du lemme 6.11 appliqué avec $\beta = a$, l'assertion (iv) est satisfaite avec $\tilde{c} = \mathbb{E}\big[M_\lambda(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta}\big]$. Passons à la preuve de l'assertion (v). Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue (procéder comme pour (6.18)), il existe $\lambda_0 \in]0,1]$ tel que

$$A_0 := \mathbb{E}\big[c(\theta_1)^\alpha M_{\lambda_0}(\theta_1)^{(s+1)m_d+\delta}\big] < 1.$$

Notons que A_0 majore toutes les espérances notées A dans le lemme 6.11, lorsque ce dernier est appliqué avec $\beta = a$ et $\lambda = \lambda_0$ (et $\gamma \in [a, \widetilde{\gamma}]$). Soit $t_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, et soit $I(t_0)$ un voisinage ouvert borné quelconque de t_0 dans $\mathbb{R}^d$. Alors la propriété (6.41) du lemme 6.11, appliquée avec $\beta = a$, $\lambda = \lambda_0$, $\gamma \in [a, \widetilde{\gamma}]$ et $\gamma' = \gamma + a - (s+1)$, assure l'existence d'une constante $C(t_0) > 0$ telle que

$$\forall t \in I(t_0), \quad m^{(\lambda_0)}_{\alpha,\beta,\gamma}\big(Q(t)f\big) \leq A_0\, m^{(\lambda_0)}_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + C(t_0)|f|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\gamma'}. \tag{6.45}$$

En itérant cette dernière inégalité et en tenant compte de l'assertion (iv), on obtient que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $M_n(t_0) > 0$ tel que pour tous $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et $t \in I(t_0)$:

$$\|Q(t)^n f\|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} \leq A_0^n \|f\|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'} + M_n(t_0)|f|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\gamma'}.$$

D'où (v) par équivalence des normes $\|\cdot\|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}$ et $\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\gamma,\gamma'}$, puis de $|\cdot|^{(\lambda_0)}_{\alpha,\gamma'}$ et $|\cdot|_{\alpha,\gamma'}$ (car $\lambda p(\cdot) \leq p_\lambda(\cdot) \leq p(\cdot)$).

Démontrons enfin l'assertion (vi). Soient $t \in \mathbb{R}^d$ et $x \in E$. Soit $\vartheta \in]0,1]$ quelconque (pour le moment). En utilisant l'inégalité $|e^{ic} - 1| \leq 2|c|^\vartheta$ $(c \in \mathbb{R})$, les hypothèses sur ξ (cf (6.20)), la définition (6.7) de $|f|_{\alpha,\gamma}$ et enfin le lemme 6.5 (page 174) avec $\lambda = 1$ ici, il vient

$$\begin{aligned}
|(Q(t)f)(x) - (Q(t_0)f)(x)| &\leq \mathbb{E}\big[|e^{i\langle t-t_0,\, \xi(\theta_1,x)\rangle} - 1||f(\theta_1 x)|\big] \\
&\leq 2\,|t-t_0|^\vartheta \mathbb{E}\big[|\xi(\theta_1,x)|^\vartheta |f(\theta_1 x)|\big] \\
&\leq 2\,|t-t_0|^\vartheta\, |f|_{\alpha,\gamma}\, p(x)^{\vartheta r}\, \mathbb{E}\big[R(\theta_1)^\vartheta\, p(\theta_1 x)^{\alpha(\gamma+1)}\big] \\
&\leq 2\,|t-t_0|^\vartheta\, |f|_{\alpha,\gamma}\, p(x)^{\vartheta r+\alpha(\gamma+1)}\, \mathbb{E}\big[\widetilde{R}(\theta_1)^\alpha M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\big].
\end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\alpha \le \delta$, on déduit de (6.44) et de l'hypothèse (6.29) que l'espérance ci-dessus est finie. En outre, comme $\gamma' > \gamma$, on peut choisir ϑ tel que $\vartheta r + \alpha(\gamma+1) \le \alpha(\gamma'+1)$. D'où l'existence d'une constante $E > 0$ telle que l'on ait, pour tout $f \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ et tout $x \in E$:

$$|(Q(t)f)(x) - (Q(t_0)f)(x)| \le E\,|t-t_0|^{\vartheta}\,|f|_{\alpha,\gamma}\,p(x)^{\alpha(\gamma'+1)},$$

D'après (6.11), on a donc : $|Q(t)f - Q(t_0)f|_{\alpha,\gamma'} \le 2\,E\,|t-t_0|^{\vartheta}\|f\|_{\alpha,a,\gamma,\gamma'}$, ce qui donne le premier point de (vi). Le second s'établit comme en (i), en utilisant l'inégalité (déjà mentionnée) $\alpha(\gamma'+1) \le (s+1)m_d + \delta$. □

6.6.2 Réduction de l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA).

On démontre le résultat B énoncé en début de section, qui concerne la réduction de l'hypothèse de non-arithméticité spectrale (NA) (page 132) sur chaque espace de la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$. On suppose à nouveau que les conditions (6.28) (6.29) (6.30) sont satisfaites. Les arguments utilisés dans cette sous-section sont classiques, et ils illustrent bien les énoncés de la sous-section 4.3.3 du chapitre 4. Comme précédemment il n'est pas utile ici de connaître précisément les définitions de α et des bornes a et $\widetilde{\gamma}$ du segment I. Les propriétés données sur ces trois nombres juste avant la proposition 6.9 sont suffisantes pour les énoncés de cette sous-section.

D'après la proposition 6.9, les noyaux de Fourier $Q(t)$ vérifient les hypothèses de la proposition 5.3 (page 132) sur chaque espace de la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$, avec $I = [a, \widetilde{\gamma}]$. Par conséquent, pour tout $\gamma \in I$, on a l'équivalence suivante :

$$(NA) \ \Leftrightarrow\ \forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ r(Q(t)) < 1, \tag{6.46}$$

où la propriété (NA) et le rayon spectral $r(Q(t))$ de l'opérateur $Q(t)$ sont considérés relativement à l'espace $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$. Pour réduire la propriété $r(Q(t)) < 1$ en termes de non-existence de valeurs propres de module 1, nous devons établir l'hypothèse (RS) (page 133), à savoir :

Proposition 6.10. *Pour tout $\gamma \in I$ et tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a $r(Q(t)) \le 1$, avec $Q(t)$ considéré comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma})$. En outre, si $r(Q(t)) = 1$, alors les valeurs spectrales de module 1 de $Q(t)$ sont des valeurs propres de $Q(t)$.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^d$ tel que $r(Q(t)) \ge 1$. Soit λ une valeur spectrale de $Q(t)$ (i. e. $\lambda \in \sigma(Q(t))$) tel que $|\lambda| = r(Q(t))$. Soit $\gamma' = \gamma + a - (s+1)$ (comme dans la proposition 6.9). Grâce aux assertions (iv) et (v) de la proposition 6.9 et au fait que l'injection canonique de $(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \|\cdot\|_{\alpha,a,\gamma,\gamma'})$ dans $(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \|\cdot\|_{\alpha,\gamma'})$ est compacte (cf. proposition 6.6), le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu s'applique (cf théorème 4.1 page 114) : comme le réel A_0 de la proposition 6.9 (v) est tel que $A_0 < 1 \le r(Q(t))$, λ est donc une valeur propre de $Q(t)$. Soient $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \{0\}$ telle que $Q(t)f = \lambda f$ et $x \in E$ tels que $f(x) \ne 0$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|Q(t)^n f| \le Q^n(|f|)$, on a en particulier

$$|\lambda|^n |f(x)| \le Q^n(|f|)(x).$$

Or, la forte ergodicité de Q sur $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ (cf. prop. 6.9 (ii)) implique en particulier la propriété : $\lim_{n\to+\infty} Q^n(|f|)(x) = \pi(|f|)$. D'où $|\lambda| \le 1$ et finalement $r(Q(t)) \le 1$. Enfin, si $r(Q(t)) = 1$, alors ce qui précède montre bien le second point de la proposition. □

Introduisons maintenant la condition suivante, qui correspond dans le cas des modèles itératifs à la condition d'arithméticité de la sous-section 4.3.3. On rappelle que $A \in \mathcal{E}$ est Q-absorbant si pour tout $x \in A$, on a $(Q1_A)(x) = 1$.

Définition 6.1. *On dit que ξ est arithmétique (et non-arithmétique dans le cas contraire) relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, un complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$, une partie Q-absorbante, $A \in \mathcal{E}$, telle que $\pi(A) = 1$, et enfin une fonction bornée $w \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ telle que $|w|$ soit constante non nulle sur A, de sorte que :*

$$\forall x \in A, \quad e^{i\langle t_0, \xi(\theta_1, x)\rangle} w(F_{\theta_1} x) = \lambda\, w(x) \quad \mathbb{P}\text{-presque sûrement.} \tag{6.47}$$

Proposition 6.11. *On a les propriétés suivantes :*

(i) Soit $\gamma \in I$. L'hypothèse (NA) (p. 132) relative à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ est satisfaite si et seulement si ξ est non-arithmétique relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$.

(ii) La condition non-lattice (p. 180) du théorème 6.1 implique que l'hypothèse (NA) est vérifiée relativement à chaque espace de la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$.

Démonstration. D'après (6.46) et la proposition 6.10, l'hypothèse (NA) relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ est équivalente à la propriété suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $Q(t)$ n'a pas de valeur propre de module 1. La preuve ci-dessous de (i) est très proche de celle de la proposition 4.10 (p. 99).

Supposons que ξ soit arithmétique relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$, et considérons les éléments t_0, λ, A et w associés, vérifiant la propriété (6.47). Démontrons qu'on a alors $r(Q(t_0)) = 1$ (donc (NA) n'est pas vérifiée). Remarquons que, pour toute fonction $g : E \to \mathbb{C}$ mesurable bornée et pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a

$$1_A Q(t) g = 1_A Q(t)(1_A g).$$

En effet, si $x \in A$, $Q(t)(1_{A^c} g)(x) = 0$ car $|(Q(t)(1_{A^c} g))(x)| \leq \|g\|_\infty Q1_{A^c}(x) = 0$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1_A Q(t_0)^n w = 1_A Q(t_0)(1_A Q(t_0)^{n-1} w).$$

Or on a $1_A Q(t_0) w = \lambda 1_A w$ car, d'après (6.47), on a pour tout $x \in A$,

$$(Q(t_0)w)(x) = \mathbb{E}[e^{i\langle t_0, \xi(\theta_1, x)\rangle} w(F_{\theta_1} x)] = \mathbb{E}[\lambda w(x)] = \lambda w(x).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1_A Q(t_0)^n w = \lambda^n 1_A w.$$

Par hypothèse il existe $M > 0$ telle que $\forall x \in A$, $|w(x)| = M$. En outre nous savons que $r(Q(t_0)) \leq 1$, et la condition $r(Q(t_0)) < 1$ conduit à une contradiction : en effet, dans ce cas, on aurait $\lim_n Q(t_0)^n w = 0$ dans $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ et comme $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma} \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\pi)$,

$$0 = \lim_n \pi(|1_A Q(t_0)^n w|) = \pi(|1_A w|) = M.$$

D'où $r(Q(t_0)) = 1$ comme annoncé.

Réciproquement, considérons $t_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $r(Q(t_0)) = 1$, avec $Q(t_0)$ vu comme élément de $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma})$, et démontrons que ξ est arithmétique relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$. Puisque

$r(Q(t_0)) = 1$, on sait que $Q(t_0)$ admet une valeur propre λ, de module 1. Soit $w \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$, $w \neq 0$ tel que $Q(t_0)w = \lambda w$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda^n w = Q(t_0)^n w$, d'où

$$|w| \leq Q^n(|w|)$$

Comme $|w| \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$, la forte ergodicité donne $\lim_n \|Q^n(|w|) - \pi(|w|)1_E\|_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$, d'où

$$\forall x \in E, \quad \lim_n Q^n(|w|)(x) = \pi(|w|).$$

Donc w est bornée sur E car $|w| \leq \pi(|w|)$, cette dernière inégalité impliquant que $\pi(|w|) > 0$ car $w \neq 0$. Soit

$$A := \{x \in E, |w(x)| = \pi(|w|)\}.$$

Posons $g(x) = \pi(|w|) - |w(x)|$, $x \in E$. Comme $g \geq 0$ et $\pi(g) = 0$, on a $g = 0$ $\pi-$p.s., et donc $\pi(A) = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\pi(|w|) = 1$. Soit $x \in A$ fixé. L'égalité $Q(t)w(x) = \lambda w(x)$ s'écrit

$$\mathbb{E}\Big[\frac{e^{i\langle\, t,\xi(\theta_1,x)\,\rangle} w(F_{\theta_1}x)}{\lambda w(x)}\Big] = 1,$$

et comme la v.a. entre crochet est de module ≤ 1, on a : $e^{i\langle\, t,\xi(\theta_1,x)\,\rangle} w(F_{\theta_1}x) = \lambda w(x)$ $\mathbb{P}-$p.s.. Cette dernière égalité implique que $F_{\theta_1}x \in A$ $\mathbb{P}-$p.s., et donc que A est absorbant car $Q(x, A) = \mathbb{E}[1_A(F_{\theta_1}x)] = 1$. On a bien montré ξ est arithmétique relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$. L'assertion (i) est donc prouvée.

Pour établir l'assertion (ii), utilisons (i) et procédons par contraposition, en supposant que ξ est arithmétique relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ pour un certain $\gamma \in I$. Considérons les éléments t_0, λ, A et w relatifs à la propriété (6.47). Soient $c \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{ic}$, puis $g : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $\forall x \in A,\ w(x) = e^{ig(x)}$. Enfin posons

$$\psi(\cdot) := g(\cdot)\,\frac{t_0}{\|t_0\|^2}, \quad b := c\,\frac{t_0}{\|t_0\|^2}, \quad \text{et} \quad H := (2\pi\mathbb{Z})\frac{t_0}{\|t_0\|^2} \oplus (\mathbb{R}\, t_0)^{\perp}.$$

Alors on a : $\forall x \in A,\ \xi(\theta_1, x) + \psi(\theta_1 x) - \psi(x) - b \in H$ $\mathbb{P}-$p.s., donc ξ ne vérifie pas la condition non-lattice. □

Remarque 6.4. *D'après la proposition 6.11, on peut remplacer dans le théorème 6.1 la condition non-lattice par la suivante : pour tout $\gamma \in I$, ξ est non-arithmétique relativement à $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$. Remarquons en outre que l'équivalence mentionnée dans la proposition 4.10 (p. 99), entre la condition lattice et celle d'arithméticité, n'est pas vraie ici (i. e. sur $\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$) en toute généralité. En fait, en étudiant la réciproque dans la preuve de (ii) ci-dessus, on peut voir facilement que cette équivalence a lieu si la fonction ψ de la condition lattice est telle que $e^{i\psi} \in \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$.*

6.6.3 Vérification de l'hypothèse $\mathcal{D}(m_d + \varepsilon_0)$.

On démontre ici le résultat C énoncé en début de section. Rappelons que la valeur m_d, qui intervient dans l'ordre des conditions de moment/contraction du théorème 6.1, est ou bien un entier ou bien un demi-entier selon qu'on est dans le cas centré ou non. En fait le résultat C est vrai quand on remplace m_d par un réel positif η quelconque, et nous présentons dans cette sous-section ce résultat plus général.

Soient $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, et $\widehat{\eta} := \eta - \lfloor \eta \rfloor$. Etant donné $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $\alpha := \min(1, \frac{\delta}{4(s+1)})$, puis

$$\varepsilon_0 := \min\left(\frac{\delta}{4\big(\alpha + (s+1)(\lfloor \eta \rfloor + 1)\big)}, \alpha, \frac{1-\widehat{\eta}}{2}\right),$$

et enfin

$$a := s + 1 + \varepsilon_0,$$
$$\widetilde{\gamma} := a + \frac{(s+1)\eta}{\alpha} + 2\,\varepsilon_0 \frac{(s+1)(\lfloor \eta \rfloor + 1)}{\alpha}.$$

On suppose que l'on a pour tout $j = 0, \dots, \lfloor \eta \rfloor$:

$$I\!E\left[\left(\widetilde{R}(\theta_1)^{j-1+\delta}\widetilde{S}(\theta) + \widetilde{R}(\theta_1)^{j+\delta}\widetilde{S}(\theta_1)^{\alpha}\right)M(\theta_1)^{(s+1)(\eta-j)+\delta}\right] < +\infty \tag{6.48}$$

$$I\!E\left[\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\delta}\widetilde{c}(\theta_1)^{\alpha}M(\theta_1)^{(s+1)(\eta-j)+\delta}\right] < +\infty. \tag{6.49}$$

$$I\!E\left[\left(\widetilde{R}(\theta_1)^{j-1+\widehat{\eta}+\delta}\widetilde{S}(\theta) + \widetilde{R}(\theta_1)^{j+\widehat{\eta}+\delta}\widetilde{S}(\theta_1)^{\alpha}\right)M(\theta_1)^{(s+1)(\lfloor \eta \rfloor-j)+\delta}\right] < +\infty \tag{6.50}$$

$$I\!E\left[\widetilde{R}(\theta_1)^{j+\widehat{\eta}+\delta}\widetilde{c}(\theta_1)^{\alpha}M(\theta_1)^{(s+1)(\lfloor \eta \rfloor-j)+\delta}\right] < +\infty. \tag{6.51}$$

Le résultat C est un cas particulier de la proposition suivante. En effet, les hypothèses (6.28) et (6.29) impliquent les précédentes avec $\eta = m_d$ (donc $\widehat{\eta} = 0$ si $m_d \in \mathbb{N}$, et $\widehat{\eta} = 1/2$ si $m_d \in 1/2 + \mathbb{N}$).

Proposition 6.12. *Sous les conditions ci-dessus, l'hypothèse $\mathcal{D}(\eta + \epsilon_0)$ (page 135) est satisfaite pour tout ouvert borné $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^d$, relativement à la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$ avec $I = [a, \widetilde{\gamma}]$.*

Démonstration. On utilisera à maintes reprises les inégalités suivantes (déjà mentionnées dans les sous-sections précédentes) qui sont clairement vérifiées d'après les définitions de α, a et $\widetilde{\gamma}$. Pour tout $\gamma \in I = [a, \widetilde{\gamma}]$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha(\gamma+1) \;\leq\; \alpha(a+\gamma) \;&\leq\; \alpha(a+\widetilde{\gamma}) \\
&\leq\; (s+1)\eta + 2\alpha\big(s+1+\varepsilon_0\big) + 2\,\varepsilon_0(s+1)(\lfloor \eta \rfloor + 1) \\
&\leq\; (s+1)\eta + 2\alpha(s+1) + 2\,\varepsilon_0\big(\alpha + (s+1)(\lfloor \eta \rfloor + 1)\big) \\
&\leq\; (s+1)\eta + \delta.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Soit $m = \eta + \varepsilon_0$. On va donc montrer que l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ est satisfaite comme indiqué dans l'énoncé. Soit $\tau := \widehat{\eta} + \varepsilon_0$. Notons que, comme $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{1-\widehat{\eta}}{2}$ par hypothèse, on a $0 < \tau \leq \frac{1+\widehat{\eta}}{2} < 1$. Donc $\lfloor m \rfloor = \lfloor \eta \rfloor$, et $m = \lfloor m \rfloor + \tau$. Définissons pour $\gamma > 0$:

$$T_0(\gamma) := \gamma + (s+1)\varepsilon_0/\alpha, \quad T_\tau(\gamma) := \gamma + (s+1)\tau/\alpha \quad \text{et} \quad T_1(\gamma) := \gamma + (s+1)(1+\varepsilon_0)/\alpha.$$

Les propriétés de commutativité concernant T_0, T_τ, et T_1 sont évidentes, ainsi que la condition **(0)** (page 135). En outre, on montre facilement que

$$\widetilde{\gamma} := T_\tau T_1^{\lfloor m\rfloor} T_0^{\lfloor m\rfloor+1}(a).$$

Pour simplifier, notons $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et soit $\gamma \in I = [a, \widetilde{\gamma}]$. Les trois propriétés suivantes démontrent que l'hypothèse $\mathcal{D}(m)$ est satisfaite relativement à la famille $\{\mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}, \gamma \in I\}$.

(i) Pour $u \in \{0, \tau\}$, on a : $T_u(\gamma) \in I \;\Rightarrow\; Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^u\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{T_u(\gamma)})\big)$,

(ii) $\forall j = 1, ..., \lfloor m\rfloor \;:\; T_1^j(\gamma) \in I \;\Rightarrow\; Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^j\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{T_1^j(\gamma)})\big)$,

(iii) $\forall j = 1, ..., \lfloor m\rfloor \;:\; T_\tau T_1^j(\gamma) \in I \;\Rightarrow\; Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{j+\tau}\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{T_\tau T_1^j(\gamma)})\big)$.

Les propriétés (i) (ii) et (iii) résultent des deux propositions suivantes (voir les détails ci-dessous). □

Soit $k \in \mathbb{N}$. La dérivée partielle $\frac{\partial^k Q}{\partial t_{p_1} \cdots \partial t_{p_k}}(t)$ de l'opérateur de Fourier $Q(t)$ donné en (6.37) est ici formellement définie par :

$$\big(Q_{(p_1,\ldots,p_k)}(t)f\big)(x) = i^k \mathbb{E}\left[\left(\prod_{s=1}^{k} \xi_{p_s}(\theta_1, x)\right) e^{i\langle t, \xi(\theta_1,x)\rangle} f(F_{\theta_1}x)\right]. \tag{6.53}$$

Pour simplifier les énoncés des propositions ci-dessous, on désigne par Q_k l'opérateur associé à un quelconque noyau de la forme précédente. En particulier, $Q_0 := Q$.

Dans les deux propositions ci-dessous, on considère β, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tels que $s+1 \le \beta \le \gamma$.

Proposition 6.13. *Soient $k \in \mathbb{N}$, $\vartheta \in]0,1]$. On suppose que les conditions de moments suivantes sont vérifiées :*

- Si $k = 0$:

$$\mathbb{E}\Big[\widetilde{R}(\theta_1)^\vartheta \widetilde{S}(\theta_1)^\alpha M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)} + \widetilde{R}(\theta_1)^\vartheta \widetilde{c}(\theta_1)^\alpha M(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\Big] < +\infty,$$

- Si $k \ge 1$:

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\widetilde{R}(\theta_1)^{k-1+\vartheta} \widetilde{S}(\theta_1) + \widetilde{R}(\theta_1)^{k+\vartheta} \widetilde{S}(\theta_1)^\alpha\Big) M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\Big] < +\infty$$

$$\mathbb{E}\Big[\widetilde{R}(\theta_1)^{k+\vartheta} \widetilde{c}(\theta_1)^\alpha M(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\Big] < +\infty.$$

Soit $\gamma' \ge \gamma + \frac{(k+\vartheta)(s+1)}{\alpha}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ nous avons $Q_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma'})$, et pour tout ouvert borné $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^d$, on a $Q_k(\cdot) \in \mathcal{C}^\vartheta\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma'})\big)$.

Proposition 6.14. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\vartheta \in]0,1]$. Supposons que*

$$\mathbb{E}\Big[\widetilde{R}(\theta_1)^{k+\vartheta}\Big(\widetilde{R}(\theta_1) + \widetilde{S}(\theta_1) + \widetilde{R}(\theta_1)\, \widetilde{S}(\theta_1)^\alpha\Big) M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\Big] \quad < +\infty$$

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{R}(\theta_1)^{k+1+\vartheta}\widetilde{c}(\theta_1)^{\alpha}M(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\right] < +\infty.$$

Soit $\gamma' \geq \gamma + \frac{(k+1+\vartheta)(s+1)}{\alpha}$. Alors $Q_k(\cdot)$ est une fonction partiellement dérivable (par rapport à chaque variable) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}, \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma'})$, et on a $Q'_k = Q_{k+1}$.

L'égalité $Q'_k = Q_{k+1}$ est bien sûr à considérer au sens de l'abus de notation mentionnée ci-dessus. Les preuves de ces deux propositions sont reportées à la sous-section suivante.

Pour obtenir les points (i) (ii) et (iii) ci-dessus, il suffit d'appliquer ces deux propositions avec $\beta = a$, et $\vartheta = \varepsilon_0$ ou $\vartheta = \tau$, en vérifiant pour chaque application que les hypothèses (6.48) (6.49) (6.50) (6.51) et les condition sur γ dans (i) (ii) ou (iii) permettent bien d'appliquer ces deux propositions. Pour compléter la preuve de la proposition 6.12, nous donnons ci-dessous les détails de ces vérifications. Rappelons qu'on a noté $\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_{\alpha,a,\gamma}$ pour simplifier.

Vérification de (i) pour $u = 0$. Considérons $\gamma \in I$ tel que $T_0(\gamma) \in I$, c'est-à-dire tel que $a \leq \gamma \leq \widetilde{\gamma} - (s+1)\varepsilon_0/\alpha$. En utilisant (6.52), on a :

$$\alpha(\gamma+1) \leq \alpha(\gamma+\beta) = \alpha(\gamma+a) \leq \alpha(\widetilde{\gamma}+a) - (s+1)\varepsilon_0 \leq (s+1)\eta + \delta.$$

Comme en outre on a $\varepsilon_0 \leq \delta$ et que $\widetilde{R}(\theta), \widetilde{S}(\theta)$ et $M(\theta)$ sont ≥ 1, les hypothèses (6.48) (6.49) (avec $j = 0$) nous permettent d'appliquer la proposition 6.13 avec $k = 0$, $\beta = a$, $\vartheta = \varepsilon_0$, qui assure que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{\varepsilon_0}\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma'})\big)$, avec $\gamma' = \gamma + \varepsilon_0(s+1)/\alpha$. Le point (i) est donc démontré pour $u = 0$, car $\gamma' = T_0(\gamma)$.

Vérification de (i) pour $u = \tau$. Soit $\gamma \in I$ tel que $T_\tau(\gamma) \in I$, c'est-à-dire tel que $a \leq \gamma \leq \widetilde{\gamma} - (s+1)\tau/\alpha$. On a ici

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma+1) \leq \alpha(\gamma+\beta) = \alpha(\gamma+a) \leq \alpha(\widetilde{\gamma}+a) - (s+1)\tau &\leq (s+1)\eta + \delta - (s+1)\tau \\ &= (s+1)(\eta-\tau) + \delta \\ &\leq (s+1)\lfloor\eta\rfloor + \delta.\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon_0 \leq \delta$, les hypothèses (6.50) (6.51) (avec $j = 0$) permettent d'appliquer la proposition 6.13 avec $k = 0$, $\beta = a$, $\vartheta = \tau$, qui assure que $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^u\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma'})\big)$ avec $\gamma' = \gamma + \tau(s+1)/\alpha$. Ceci prouve le point (i) pour $u = \tau$, car $\gamma' = T_\tau(\gamma)$.

Vérification de (ii). Soit $j \in \{1, \ldots, \lfloor m\rfloor\}$, et soit $\gamma \in I$ tel que $T_1^j(\gamma) := \gamma + j\,(s+1)(1+\varepsilon_0)/\alpha$ soit aussi dans I, c'est-à-dire : $a \leq \gamma \leq \widetilde{\gamma} - j\,(s+1)(1+\varepsilon_0)/\alpha$. On a ici :

$$\alpha(\gamma+1) \leq \alpha(\beta+\gamma) = \alpha(\gamma+a) \leq \alpha\big(\widetilde{\gamma} + a - j\,\frac{(s+1)(1+\varepsilon_0)}{\alpha}\big) \leq (s+1)(\eta - j) + \delta,$$

de sorte que les hypothèses (6.48) (6.49) permettent d'appliquer avec $\beta = a$, $\vartheta = \epsilon_0$, d'une part la proposition 6.14 avec $k = j - 1$, d'autre part la proposition 6.13 avec $k = j$. D'où : $Q(\cdot) \in \mathcal{C}_b^{j+\varepsilon_0}\big(\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma'})\big)$ avec $\gamma' := \gamma + (j+\varepsilon_0)(s+1)/\alpha$. D'où (ii) car on a clairement $\gamma' \leq T_1^j(\gamma) := \gamma_j$, donc $\mathcal{B}_{\gamma'} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\gamma_j}$, et finalement $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma'}) \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma_j})$.

Vérification de (iii). Soit $j \in \{1, \ldots, \lfloor m\rfloor\}$, et soit $\gamma \in I$ tel que

$$T_\tau T_1^j(\gamma) := \gamma + (s+1)\big(j(1+\varepsilon_0) + \tau\big)/\alpha \quad \in I,$$

c'est-à-dire :

$$a \le \gamma \le \widetilde{\gamma} - (s+1)\big(j(1+\varepsilon_0)+\tau\big)/\alpha.$$

Posons $\gamma_j := T_1^j(\gamma)$ et $\gamma_{j,\tau} := T_\tau T_1^j(\gamma)$. Du point (ii) et de $\mathcal{B}_{\gamma_j} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\gamma_{j,\tau}}$, on sait que $Q(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^j$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma_{j,\tau}})$ avec $Q^{(j)}(\cdot) = Q_j(\cdot)$. Pour montrer le propriété (iii), il reste à établir que $Q_j(\cdot)$ est τ-holderienne. On a ici

$$\begin{aligned}
\alpha(\gamma+1) \le \alpha(\beta+\gamma) = \alpha(\gamma+a) &\le \alpha\big(\widetilde{\gamma} + a - (s+1)\big(\tau + j(1+\varepsilon_0)\big)/\alpha\big)\\
&\le (s+1)\eta + \delta - (s+1)\big(\tau + j\big)\\
&\le (s+1)(\eta - \tau - j) + \delta\\
&\le (s+1)(\lfloor \eta \rfloor - j) + \delta.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon_0 \le \delta$, les hypothèses (6.50) (6.51) permettent donc d'appliquer la proposition 6.13 avec $k = j$, $\beta = a$, $\vartheta = \tau$. D'où $Q_j(\cdot) \in \mathcal{C}^\tau(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma'})$ avec $\gamma' = \gamma + (j+\tau)(s+1)/\alpha$, et par conséquent $Q_j(\cdot) \in \mathcal{C}^\tau(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_\gamma, \mathcal{B}_{\gamma_{j,\tau}})$ car, comme $\gamma' \le \gamma_{j,\tau}$, $\mathcal{B}_{\gamma'} \hookrightarrow \mathcal{B}_{\gamma_{j,\tau}}$.

6.6.4 Démonstration des propositions 6.13 et 6.14.

Dans le cas particulier de l'exemple 1 (page 176), conduisant aux fonctionnelles additives de $(X_n)_n$, les propositions 6.13 et 6.14 peuvent être établies en appliquant directement les résultats de [48, Section. 11]. Dans le cas général des fonctionnelles additives de $(\xi(\theta_k, X_{k-1}))_k$, avec ξ vérifiant (6.20) (6.21), les preuves de ces deux propositions sont semblables, mais un peu plus techniques.

Par commodité, on rappelle tout d'abord quelques notations et propriétés introduites au début du chapitre et dans la section 6.2 qui seront systématiquement utilisées dans la suite. Soient $\theta \in G$ et $(x,y) \in E^2$. Par définition de $c(\cdot)$ on a

$$d(F_\theta x, F_\theta y) \le c(\theta)\, d(x,y).$$

On a noté $M(\theta) = \max(1, c(\theta)) + d(x_0, F_\theta x_0)$, et $p(x) = 1 + d(x, x_0)$. On a (lemme 6.5)

$$p(F_\theta x) \le M(\theta)\, p(x).$$

Pour tous $\alpha \in]0,1]$, $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \beta \le \gamma$, et tout $(x,y) \in E^2$, on a défini le poids $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) = p(x)^{\alpha\beta}\, p(y)^{\alpha\gamma} + p(x)^{\alpha\gamma}\, p(y)^{\alpha\beta}$, et on a (lemme 6.5)

$$\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(F_\theta x, F_\theta y) \le M(\theta)^{\alpha(\beta+\gamma)}\, \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y).$$

Enfin on a posé pour $f : E \to \mathbb{C}$,

$$|f|_{\alpha,\gamma} := \sup_{x\in E} \frac{|f(x)|}{p(x)^{\alpha(\gamma+1)}} \quad \text{et} \quad m_{\alpha,\beta,\gamma}(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha\, \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y)},\ x,y \in E,\ x \ne y \right\},$$

puis $\|f\|_{\alpha,\beta,\gamma} := m_{\alpha,\beta,\gamma}(f) + |f|_{\alpha,\gamma}$, la condition $m_{\alpha,\beta,\gamma}(f) < +\infty$ impliquant que $|f|_{\alpha,\gamma} < +\infty$, et donc $\|f\|_{\alpha,\beta,\gamma} < +\infty$, et définissant ainsi la norme sur $\mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Ceci étant rappelé, on utilisera le lemme suivant. Soit $q : G \times E \to \mathbb{C}$ mesurable. Supposons qu'il existe deux constantes positives u et v et deux fonctions mesurables positives $U(\cdot)$ et $V(\cdot)$ définies sur G telles que, pour tous $\theta \in G$ et $x, y \in E$ tels que $d(x_0, y) \leq d(x_0, x)$, on ait :

$$\begin{aligned} |q(\theta, x)| &\leq U(\theta)\, p(x)^u &\quad (6.54)\\ |q(\theta, x) - q(\theta, y)| &\leq V(\theta)\, d(x, y)^\alpha\, p(x)^v. &\quad (6.55)\end{aligned}$$

Posons (formellement) pour tous $x \in E$ et $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$

$$Kf(x) = \mathbb{E}\big[q(\theta_1, x)\, f(F_{\theta_1} x)\big]. \tag{6.56}$$

Lemme 6.12. *Sous les hypothèses (6.54) et (6.55), nous avons pour tous $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$ et $x, y \in E$ tels que $d(x_0, y) \leq d(x_0, x)$,*

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\leq \mathbb{E}\big[U(\theta_1) M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\big]\, |f|_{\alpha,\gamma}\, p(x)^{u+\alpha(\gamma+1)}\\ |Kf(x) - Kf(y)| &\leq \mathbb{E}\big[U(\theta_1) c(\theta_1)^\alpha M(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\big]\, m_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, d(x, y)^\alpha\, p(x)^u\, \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y)\\ &\quad + \mathbb{E}\big[V(\theta_1)\, M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\big]\, |f|_{\alpha,\gamma}\, d(x, y)^\alpha\, p(x)^v\, p(y)^{\alpha(\gamma+1)}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |Kf(x)| \leq \mathbb{E}\big[|q(\theta_1, x)\, f(F_{\theta_1} x)|\big] &\leq \mathbb{E}[\, U(\theta_1)\, p(x)^u\, |f|_{\alpha,\gamma}\, p(F_{\theta_1} x)^{\alpha(\gamma+1)}\,]\\ &\leq \mathbb{E}[\, U(\theta_1) M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1))}]\, |f|_{\alpha,\gamma}\, p(x)^{u+\alpha(\gamma+1)}, \end{aligned}$$

puis pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $d(x_0, y) \leq d(x_0, x)$

$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(y)| &\leq \mathbb{E}\Big[|q(\theta_1, x)|\, |f(F_{\theta_1} x) - f(F_{\theta_1} y)|\Big] + \mathbb{E}\Big[|f(F_{\theta_1} y)|\, |q(\theta_1, x) - q(\theta_1, y)|\Big]\\ &\leq \mathbb{E}\Big[U(\theta_1)\, p(x)^u\, m_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, d(F_{\theta_1} x, F_{\theta_1} y)^\alpha\, \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(F_{\theta_1} x, F_{\theta_1} y)\Big]\\ &\qquad + |f|_{\alpha,\gamma}\, \mathbb{E}\Big[p(F_{\theta_1} y)^{\alpha(\gamma+1)}\, V(\theta_1) d(x, y)^\alpha\, p(x)^v\Big]\\ &\leq \mathbb{E}\Big[U(\theta_1)\, c(\theta_1)^\alpha\, M(\theta_1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\Big]\, m_{\alpha,\beta,\gamma}(f)\, d(x, y)^\alpha\, p(x)^u\, \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y)\\ &\qquad + \mathbb{E}\Big[V(\theta_1)\, M(\theta_1)^{\alpha(\gamma+1)}\Big]\, |f|_{\alpha,\gamma}\, d(x, y)^\alpha\, p(x)^v\, p(y)^{\alpha(\gamma+1)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la seconde inégalité du lemme. □

Pour simplifier, nous donnons la preuve des propositions 6.13 et 6.14 dans le cas $d = 1$. L'extension à $d \geq 2$ est simple en utilisant les dérivées partielles (et les opérateurs donnés dans (6.53)). On rappelle que les noyaux de Fourier (cf $Q_0(t)$ ci-dessous) sont associés à $\xi : G \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses (6.20) et (6.21). Par conséquent, il existe $r,\ s \in \mathbb{R}^+$, avec $r \leq s + 1$, et deux applications $R,\ S : G \to \mathbb{R}^+$ mesurables telles que : $\forall \theta \in G$, $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} |\xi(\theta, x)| &\leq R(\theta)\, p(x)^r\\ |\xi(\theta, x) - \xi(\theta, y)| &\leq S(\theta)\, d(x, y)\, \big(p(x) + p(y)\big)^s. \end{aligned}$$

Les opérateurs $Q_k(t)$ sont définis (formellement) par :

$$t \in \mathbb{R},\ x \in E, \quad (Q_k(t)f)(x) = \mathbb{E}\big[i^k \xi(\theta_1, x)^k e^{it\xi(\theta_1,x)} f(F_{\theta_1}x)\big].$$

On utilisera dans la suite l'inégalité suivante, vérifiée pour $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, y) \in E^2$ tel que $d(y, x_0) \le d(x, x_0)$:

$$|\xi(\theta, x)^k - \xi(\theta, y)^k| \le C\, S(\theta)\, R(\theta)^{k-1}\, d(x, y)^\alpha\, p(x)^{s+1-\alpha+(k-1)r}. \tag{6.57}$$

La preuve de cette inégalité est simple. En effet, de $d(x, y) \le p(x) + p(y) \le 2\,p(x)$, il vient

$$|\xi(\theta, x) - \xi(\theta, y)| \le 2^{s+1-\alpha} S(\theta) d(x, y)^\alpha p(x)^{s+1-\alpha}. \tag{6.58}$$

On déduit l'inégalité souhaitée en utilisant le fait que $p(y) \le p(x)$ et l'égalité

$$\xi(\theta, x)^k - \xi(\theta, y)^k = \big(\xi(\theta, x) - \xi(\theta, y)\big) \sum_{\ell=0}^{k-1} \xi(\theta, x)^{k-1-\ell} \xi(\theta, y)^\ell,$$

Enfin on note pour $b \in \mathbb{R}$ et $(\theta, x) \in G \times E$:

$$e_b(\theta, x) = e^{ib\xi(\theta,x)}.$$

Rappelons que, pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $\vartheta \in]0, 1]$, on a

$$|e^{ic} - 1| \le 2|c|^\vartheta. \tag{6.59}$$

Dans les majorations ci-dessous, nous utiliserons la notation C pour désigner une constante strictement positive, dont la valeur pourra changer d'une inégalité à l'autre. Ces constantes pourront dépendre de l'entier k, de la constante s, et du point $t_0 \in \mathbb{R}^d$ en lequel on étudie la régularité, mais elles ne dépendront, ni de la fonction générique $f \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta,\gamma}$, ni de la variable $t \in \mathbb{R}^d$, ni enfin des points $x, y \in E$.

Preuve de la proposition 6.13.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ donné. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $h = t - t_0$ et on suppose que $|h| \le 1$. On a formellement pour le moment

$$Kf(x) = Q_k(t)f(x) - Q_k(t_0)f(x) = \mathbb{E}[q(\theta_1, x)\, f(F_{\theta_1}x)],$$

avec

$$q(\theta, x) = (i\xi(\theta, x))^k \big(e_t(\theta, x) - e_{t_0}(\theta, x)\big). \tag{6.60}$$

La proposition 6.13 est une conséquence du lemme 6.12 et des deux lemmes suivants. □

Lemme 6.13. *La fonction q donnée en (6.60) vérifie l'hypothèse (6.54) du lemme 6.12 avec :*

$$U(\theta) = 2\,|h|^\vartheta\, R(\theta)^{k+\vartheta} \quad \textit{et} \quad u = (k + \vartheta)r,$$

et on a : $u + \alpha(\gamma + 1) \le \alpha(\gamma' + 1)$.

Démonstration. D'après (6.59), on a $|q(\theta, x)| \le 2\,|h|^\vartheta |\xi(\theta, x)|^{k+\vartheta}$. La fonction $U(\theta)$ et la constante u se déduisent donc des conditions sur ξ. Par hypothèse dans la proposition 6.13, on a $\alpha\gamma + (k + \vartheta)(s + 1) \le \alpha\gamma'$, et on sait que $r \le s + 1$. D'où le dernier point du lemme. □

On rappelle que : $\forall \theta \in G, \quad \widetilde{R}(\theta) := \max(1, R(\theta))$.

Lemme 6.14. *La fonction q donnée en (6.60) vérifie l'hypothèse (6.55) du lemme 6.12 avec $v = (k+\vartheta)(s+1) + \alpha s$, et :*
- Si $k = 0$: $V(\theta) = C\,|h|^\vartheta\, \widetilde{R}(\theta)^\vartheta\, S(\theta)^\alpha$,
- Si $k \geq 1$: $V(\theta) = C\,|h|^\vartheta\, \big(R(\theta)^{k-1+\vartheta}\, S(\theta) + \widetilde{R}(\theta)^{k+\vartheta}\, S(\theta)^\alpha\big)$.
En outre on a : $p(x)^u \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \leq 2\Delta_{\alpha,\beta,\gamma'}(x,y)$, et $p(x)^v\, p(y)^{\alpha(\gamma+1)} \leq \Delta_{\alpha,\beta,\gamma'}(x,y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ tels que $d(y,x_0) \leq d(x,x_0)$. On a :

$$\begin{aligned} |q(\theta,x) - q(\theta,y)| \ &\leq\ |\xi(\theta,x)^k - \xi(\theta,y)^k|\, |e_t(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,x)| + \\ &\qquad |\xi(\theta,y)|^k\ \Big|\, \big(e_t(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,x)\big) - \big(e_t(\theta,y) - e_{t_0}(\theta,y)\big)\, \Big|, \end{aligned}$$

et on notera que le premier terme dans le membre de droite ci-dessus est nul si $k = 0$. De (6.57) et de

$$|e_t(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,x)| \leq 2|h|^\vartheta |\xi(\theta,x)|^\vartheta \leq 2|h|^\vartheta\, R(\theta)^\vartheta p(x)^{r\vartheta},$$

il vient que

$$|\xi(\theta,x)^k - \xi(\theta,y)^k|\, |e_t(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,x)| \leq C\,|h|^\vartheta\ R(\theta)^{k-1+\vartheta}\, S(\theta) d(x,y)^\alpha\, p(x)^{(k-1+\vartheta)r+s+1-\alpha}.$$

Ecrivons maintenant

$$\begin{aligned} E_t(\theta,x,y) \ &:=\ \big(e_t(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,x)\big) - \big(e_t(\theta,y) - e_{t_0}(\theta,y)\big) \\ &=\ e_{t_0}(\theta,x)\big(e_h(\theta,x) - e_h(\theta,y)\big) + \big(e_h(\theta,y) - 1\big)\big(e_{t_0}(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,y)\big). \end{aligned}$$

En appliquant (6.59) avec les exposants $\max(\vartheta,\alpha)$, ϑ et α, puis en utilisant les conditions sur ξ, et enfin les inégalités $p(y) \leq p(x)$ et $|h| \leq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} |E_t(\theta,x,y)| \ &\leq\ \big|e_h(\theta,x) - e_h(\theta,y)\big| + \big|e_h(\theta,y) - 1\big|\, \big|e_{t_0}(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,y)\big| \\ &\leq\ 2|h|^{\max(\vartheta,\alpha)}\, \big|\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)\big|^{\max(\vartheta,\alpha)} + 2|h|^\vartheta\, |\xi(\theta,y)|^\vartheta\, 2|t_0|^\alpha\, \big|\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)\big|^\alpha \\ &\leq\ 2|h|^\vartheta\, \big(|\xi(\theta,x)| + |\xi(\theta,y)|\big)^{\max(\vartheta,\alpha)-\alpha} \big|\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)\big|^\alpha \ + \\ &\qquad\qquad 4\,|t_0|^\alpha |h|^\vartheta\, |\xi(\theta,y)|^\vartheta \big|\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)\big|^\alpha \\ &\leq\ C\,|h|^\vartheta \widetilde{R}(\theta)^{\max(\vartheta,\alpha)-\alpha} p(x)^{r(\max(\vartheta,\alpha)-\alpha)} S(\theta)^\alpha d(x,y)^\alpha p(x)^{\alpha s} \ + \\ &\qquad\qquad C\,|h|^\vartheta R(\theta)^\vartheta p(y)^{\vartheta r}\, S(\theta)^\alpha d(x,y)^\alpha p(x)^{\alpha s} \\ &\leq\ C\,|h|^\vartheta\, \widetilde{R}(\theta)^\vartheta S(\theta)^\alpha d(x,y)^\alpha p(x)^{\vartheta r + \alpha s}. \end{aligned}$$

D'où, comme $|\xi(\theta,y)|^k \leq R(\theta)^k\, p(x)^{rk}$,

$$|\xi(\theta,y)|^k\, |E_t(\theta,x,y)| \leq C\ |h|^\vartheta\, \widetilde{R}(\theta)^{k+\vartheta}\, S(\theta)^\alpha\, d(x,y)^\alpha\, p(x)^{(k+\vartheta)r+\alpha s}.$$

Finalement, en utilisant les inégalités qui viennent d'être établies, on a :

$$\begin{aligned} |q(\theta,x) - q(\theta,y)| \ &\leq\ C\,|h|^\vartheta\ R(\theta)^{k-1+\vartheta}\, S(\theta) d(x,y)^\alpha\, p(x)^{(k-1+\vartheta)r+s+1-\alpha} \ + \\ &\qquad C\,|h|^\vartheta\, \widetilde{R}(\theta)^{k+\vartheta}\, S(\theta)^\alpha d(x,y)^\alpha p(x)^{(k+\vartheta)r+\alpha s}, \end{aligned}$$

sachant que le premier terme dans le membre de droite ci-dessus n'intervient pas lorsque $k = 0$. Ceci donne bien la fonction $V(\theta)$ cherchée. L'expression de la constante v résulte de l'inégalité suivante (utiliser $r \le s+1$) :

$$\max\Big((k-1+\vartheta)r + s + 1 - \alpha\ ,\ (k+\vartheta)r + \alpha s\Big) \le (k+\vartheta)(s+1) + \alpha s.$$

Enfin, comme $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \le 2p(x)^{\alpha\gamma}p(y)^{\alpha\beta}$ (car on a $p(y) \le p(x)$), puis que $r \le s+1$ et $\alpha\gamma + (k+\vartheta)(s+1) \le \alpha\gamma'$ (par hypothèse dans la proposition 6.13), on a

$$p(x)^u \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \le p(x)^{(k+\vartheta)(s+1)}\, 2p(x)^{\alpha\gamma}p(y)^{\alpha\beta} \le 2p(x)^{\alpha\gamma'}p(y)^{\alpha\beta} \le 2\Delta_{\alpha,\beta,\gamma'}(x,y).$$

Et, comme $p(y) \le p(x)$ et $s+1 \le \beta$, on a aussi

$$\begin{aligned} p(x)^v\, p(y)^{\alpha(\gamma+1)} = p(x)^{(k+\vartheta)(s+1)+\alpha s}p(y)^{\alpha(\gamma+1)} &= p(x)^{(k+\vartheta)(s+1)+\alpha s}p(y)^{\alpha(\gamma+1-\beta)}p(y)^{\alpha\beta} \\ &\le p(x)^{\alpha\gamma+(k+\vartheta)(s+1)+\alpha(s+1-\beta)}p(y)^{\alpha\beta} \\ &\le p(x)^{\alpha\gamma'}p(y)^{\alpha\beta} \\ &\le \Delta_{\alpha,\beta,\gamma'}(x,y), \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la dernière inégalité du lemme 6.14. □

Preuve de la proposition 6.14.
Soient t et $t_0 \in \mathbb{R}$. On note à nouveau $h = t - t_0$, et on suppose que $|h| \le 1$. Posons, pour tout $(\theta, x) \in G \times E$:

$$q(\theta,x) = (i\xi(\theta,x))^k \big(e_t(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,x) - i\,h\,\xi(\theta,x)\,e_{t_0}(\theta,x)\big). \tag{6.61}$$

L'opérateur K associé à $q(\theta,x)$ (via la formule (6.56)) correspond à :

$$K = Q_k(t) - Q_k(t_0) - h\,Q_{k+1}(t_0).$$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\phi(c) = e^{ic} - 1 - ic$, de sorte que

$$q(\theta,x) = (i\xi(\theta,x))^k\, e_{t_0}(\theta,x)\,\phi\big(h\xi(\theta,x)\big). \tag{6.62}$$

Rappelons que, par hypothèse dans la proposition 6.14, $\vartheta \in]0,1]$ est tel que

$$\alpha\gamma + (k+1+\vartheta)(s+1) \le \alpha\gamma'. \tag{6.63}$$

Nous utiliserons dans la suite de cette preuve les deux inégalités suivantes : $\forall (c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\phi(c)| \le 2\,|c|^{1+\vartheta} \tag{6.64}$$

$$|\phi(c) - \phi(d)| \le 2\,|c-d|\,(|c|^\vartheta + |d|^\vartheta). \tag{6.65}$$

La proposition 6.14 résulte du lemme 6.12 et des deux lemmes suivants. □

Lemme 6.15. *La fonction q donnée en (6.61) vérifie l'hypothèse (6.54) du lemme 6.12 avec :*

$$U(\theta) = C\,|h|^{1+\vartheta}\,R(\theta)^{k+1+\vartheta} \quad \textit{et} \quad u = (k+1+\vartheta)r, \tag{6.66}$$

et on a : $u + \alpha(\gamma+1) \le \alpha(\gamma'+1)$

Démonstration. Les expressions de $U(\cdot)$ et u découlent de (6.62), (6.64) et des conditions sur ξ. Le dernier point du lemme s'obtient en utilisant $r \leq s+1$ et (6.63). $\square$

Lemme 6.16. *La fonction q donnée en (6.61) vérifie l'hypothèse (6.55) du lemme 6.12 avec :*

$$V(\theta) = C\,|h|^{1+\vartheta}\left(R(\theta)^{k+\vartheta}S(\theta) + R(\theta)^{k+1+\vartheta}S(\theta)^{\alpha}\right) \quad et \quad v = (k+1+\vartheta)(s+1) + \alpha s.$$

En outre on a : $p(x)^u \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) \leq 2\Delta_{\alpha,\beta,\gamma'}(x,y)$, et $p(x)^v\, p(y)^{\alpha(\gamma+1)} \leq \Delta_{\alpha,\beta,\gamma'}(x,y)$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $x, y \in E$ tels que $d(y,x_0) \leq d(x,x_0)$ (donc $p(y) \leq p(x)$). Procédons comme dans la preuve précédente. On a :

$$\begin{aligned}
|q(\theta,x) - q(\theta,y)| &\leq |\xi(\theta,x)^k - \xi(\theta,y)^k|\,|\phi(h\xi(\theta,x))| \\
&\qquad + |\xi(\theta,y)|^k \big|e_{t_0}(\theta,x)\phi(h\xi(\theta,x)) - e_{t_0}(\theta,y)\phi(h\xi(\theta,y))\big| \\
&:= D(\theta,x,y) + E(\theta,x,y).
\end{aligned}$$

(noter que $D(\theta,x,y) = 0$ si $k = 0$). On obtient en utilisant (6.64) et (6.57) que :

$$D(\theta,x,y) \leq C\,|h|^{1+\vartheta}\, d(x,y)^{\alpha}\, S(\theta)\, R(\theta)^{k-1}\, p(x)^{s+1-\alpha+(k-1)r}\, R(\theta)^{1+\vartheta} p(x)^{r(1+\vartheta)}.$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
E(\theta,x,y) &\leq R(\theta)^k p(x)^{rk}\left(\big|\phi(h\xi(\theta,x)) - \phi(h\xi(\theta,y))\big| + |\phi(h\xi(\theta,y))|\,\big|e_{t_0}(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,y)\big|\right) \\
&:= R(\theta)^k p(x)^{rk}\big(E_1(\theta,x,y) + E_2(\theta,x,y)\big).
\end{aligned}$$

Or, d'après (6.65) (6.58) et $p(y) \leq p(x)$, on a

$$\begin{aligned}
E_1(\theta,x,y) &\leq 2|h||\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)|(|h\xi(\theta,x)|^{\vartheta} + |h\xi(\theta,y)|^{\vartheta}) \\
&\leq C\,|h|^{1+\vartheta} R(\theta)^{\vartheta} S(\theta) d(x,y)^{\alpha} p(x)^{s+1-\alpha+r\vartheta},
\end{aligned}$$

et comme on a $|e_{t_0}(\theta,x) - e_{t_0}(\theta,y)| \leq 2|t_0|^{\alpha}|\xi(\theta,x) - \xi(\theta,y)|^{\alpha}$, on déduit de (6.64) que

$$\begin{aligned}
E_2(\theta,x,y) &\leq C\,|h|^{1+\vartheta} R(\theta)^{1+\vartheta} p(y)^{r(1+\vartheta)}\, S(\theta)^{\alpha} d(x,y)^{\alpha} p(x)^{\alpha s} \\
&\leq C\,|h|^{1+\vartheta} R(\theta)^{1+\vartheta} S(\theta)^{\alpha} d(x,y)^{\alpha} p(x)^{r(1+\vartheta)+\alpha s}.
\end{aligned}$$

En utilisant les majorations ci-dessus et le fait que $r \leq s+1$, on obtient bien les expressions de $V(\cdot)$ et v souhaitées. Pour obtenir les dernières propriétés du lemme, on procède comme à la fin de la preuve du lemme 6.14 en utilisant ici (6.63). $\square$

Chapitre 7

Annexes.

ANNEXE A. DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS 1.7-1.8.

Par commodité nous retranscrivons ci-dessous les hypothèses et les énoncés des propositions 1.7-1.8.

Définition de la fonction w.
Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $x' := (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, et on considère la fonction w définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par :

$$w(x) = -ix_1 + \|x'\|^2. \tag{7.1}$$

Remarque A.1. *Si $x_1 \neq 0$ et $x' \neq 0$, on a $\frac{1}{|w(x)|} \leq \frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\|x'\|^{\frac{1}{2}}}$. La fonction $\dfrac{1}{w}$, définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, est donc intégrable en 0 d'après le théorème de Fubini-Tonelli.*

Dans les deux propositions suivantes, r désigne un réel strictement positif quelconque, et l'on considère deux fonctions θ et v de $\mathcal{C}_b^m\big(B(0,r), \mathbb{C}\big)$, avec m précisé dans chacun des énoncés.

Proposition A.1. *Soit $m = \max\left(\frac{d-1}{2}, 1\right) + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que θ est à support compact dans $B(0,r)$, que $\theta(0) = 0$, et que v vérifie les deux conditions suivantes :*

$$\forall j \in \{2, \ldots, d\}, (\partial_j v)(0) = 0, \tag{7.2}$$

$$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall x \in B(0,r), \quad a|w(x)| \leq |v(x)| \leq b|w(x)|. \tag{7.3}$$

Alors la fonction $q := \dfrac{\theta}{v}\, 1_{B(0,r)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $\displaystyle\lim_{\|a\| \to +\infty} \|a\|^{\frac{d-1}{2}} \hat{q}(a) = 0$.

Proposition A.2. *Soit $m = \max\left(\frac{d-1}{2}, 2\right) + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que θ et v vérifient les conditions de la proposition 1.7, et en outre que toutes les dérivées partielles premières et secondes de θ sont nulles en 0. Soit $\tilde{v} \in \mathcal{C}_b^m\big(B(0,r), \mathbb{C}\big)$ vérifiant les mêmes hypothèses que v. Alors la fonction $q := \dfrac{\theta}{v\, \tilde{v}}\, 1_{B(0,r)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $\displaystyle\lim_{\|a\| \to +\infty} \|a\|^{\frac{d-1}{2}} \hat{q}(a) = 0$.*

Pour établir ces deux propositions, nous commençons par introduire quelques notations.

Pour $(\omega_0, \omega_0') \in]0, +\infty[^2$ tel que $\omega_0 < \omega_0'$, on note :

$$\Gamma_{0,\omega_0,\omega_0'} := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ \omega_0 \leq |w(x)| \leq \omega_0'\}. \tag{7.4}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On définit la "dilatation" D_k sur $\mathbb{R}^d$ en posant, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$D_k(x) = (\frac{x_1}{4^k}, \frac{x_2}{2^k}, \dots, \frac{x_d}{2^k}) \tag{7.5}$$

et on note

$$\Gamma_{k,\omega_0,\omega_0'} := D_k(\Gamma_{0,\omega_0,\omega_0'}) = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{\omega_0}{4^k} \leq |w(x)| \leq \frac{\omega_0'}{4^k}\}, \tag{7.6}$$

et plus simplement, $\Gamma_k := \Gamma_{k,\,\frac{1}{4},1}$, c'est-à-dire :

$$\Gamma_k := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{1}{4^{k+1}} \leq |w(x)| \leq \frac{1}{4^k}\} \tag{7.7}$$

Nous utiliserons plusieurs fois l'inclusion immédiate suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_{k,\omega_0,\omega_0'} \subset B(0, \frac{\sqrt{\omega_0'^2 + \omega_0'}}{2^k}) \tag{7.8}$$

Posons

$$\widetilde{\Gamma_0} := \Gamma_{0,\frac{1}{8},2} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{1}{8} \leq |w(x)| \leq 2\} \tag{7.9}$$

Comme $\widetilde{\Gamma_0} \subset \Gamma_{-1} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, on a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad D_k(\widetilde{\Gamma_0}) \subset \Gamma_{k-1} \cup \Gamma_k \cup \Gamma_{k+1} \tag{7.10}$$

Fixons maintenant $r > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\frac{\sqrt{2}}{2^{k_0-1}} < r$.
D'après (7.8), on a pour tout $p \geq k_0 - 1$, $\Gamma_p \subset B(0, \frac{\sqrt{2}}{2^p}) \subset B(0, \frac{\sqrt{2}}{2^{k_0-1}}) \subset B(0, r)$ et donc par (7.10), pour tout $k \geq k_0$,

$$D_k(\widetilde{\Gamma_0}) \subset B(0, \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}}) \subset B(0, r). \tag{7.11}$$

Soit $u : B(0, r) \to \mathbb{C}$. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k sur $B(0, r)$ en posant :

$$\forall x \in B(0, r), \quad u_k(x) = u(D_k x).$$

Remarquons que si $k \geq k_0$, u est définie sur $D_k(\widetilde{\Gamma_0})$ et donc u_k est bien définie sur $\widetilde{\Gamma_0}$. La norme $\| \cdot \|_{m,\widetilde{\Gamma_0}}$ a été définie dans la définition 1.2.

Proposition A.3. *Soit m un réel supérieur ou égal à 2. Soient $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ à support compact dans $\widetilde{\Gamma_0}$, $\theta \in \mathcal{C}^m(B(0, r), \mathbb{C})$, à support compact dans $B(0, r)$, telle que $\theta(0) = 0$ et $v \in \mathcal{C}_b^m(B(0, r), \mathbb{C})$ vérifiant (7.2) et (7.3). Alors la fonction $\rho\dfrac{\theta_k}{v_k}$, prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus \widetilde{\Gamma_0}$, appartient à $\mathcal{C}_b^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et il existe $K > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\|\rho\dfrac{\theta_k}{v_k}\|_{m,\widetilde{\Gamma_0}} \leq K\, 2^k$.*

Proposition A.4. *Soient $\varepsilon > 0$ et m un réel supérieur ou égal à $2+\varepsilon$. Soient ρ, v, θ vérifiant les hypothèses de la proposition A.3 et $\tilde{v}$ vérifiant les mêmes hypothèses que v. Supposons de plus que :*

$$\forall j \in \{1,\dots,d\}, (\partial_j\theta)(0) = 0, \ \forall (j,l) \in \{1,\dots,d\}^2, \ (\partial^2_{jl}\theta)(0) = 0. \tag{7.12}$$

Alors la fonction $\rho\dfrac{\theta_k}{v_k\,\tilde{v}_k}$, prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{\Gamma_0}$, appartient à $\mathcal{C}^m_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ et il existe $L>0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait : $\big\|\rho\dfrac{\theta_k}{v_k\,\tilde{v}_k}\big\|_{m,\widetilde{\Gamma_0}} \leq L\,(2^k)^{2-\varepsilon}$.

La preuve des propositions A.3-A.4 est reportée à la fin de cette annexe.

Nous allons maintenant construire une partition de l'unité adaptée aux sous-ensembles $\widetilde{\Gamma_k} := D_k(\widetilde{\Gamma_0})$, $k \in \mathbb{Z}$, puis démontrer les propositions A.1 et A.2 en utilisant cette partition de l'unité et les propositions A.3-A.4.

Construction d'une partition de l'unité sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Rappelons que $\widetilde{\Gamma_0} = \big\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{1}{8} \leq |w(x)| \leq 2\big\}$. Définissons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{\Gamma_k} := D_k(\widetilde{\Gamma_0}) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \frac{1}{8}\,\frac{1}{4^k} \leq |w(x)| \leq 2\,\frac{1}{4^k}\big\}.$$

Observons que $\widetilde{\Gamma_k}$ contient Γ_k (cf. (7.7)).
Soit $\gamma \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^+)$, à support compact dans $\widetilde{\Gamma_0}$, telle que

$$\forall x \in \Gamma_0, \quad \gamma(x) = 1.$$

Remarquons que $\gamma \circ D_{-k} \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^+)$ et que $\gamma \circ D_{-k}$ est à support compact dans $\widetilde{\Gamma_k}$. Considérons maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(D_{-k}x) \in [1,+\infty]$$

On a $\phi(0) = 0$ et si $x \neq 0$:

$$x \in \widetilde{\Gamma_k} \quad \Leftrightarrow \quad k \in [\frac{-\ln 8 - \ln|w(x)|}{\ln 4}, \frac{\ln 2 - \ln|w(x)|}{\ln 4}].$$

Comme l'intervalle précédent est de longueur 2, $x \neq 0$ appartient à au plus trois ensembles $\widetilde{\Gamma_k}$ et $\phi(x) \in [1,+\infty[$ car $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} = \cup_{p\in\mathbb{Z}}\Gamma_p = \cup_{p\in\mathbb{Z}}\widetilde{\Gamma_p}$.
Remarquons aussi que par définition de ϕ

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \ \phi \circ D_\ell = \phi. \tag{7.13}$$

Proposition A.5. *Soit ρ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par : $\rho(x) := \frac{\gamma(x)}{\phi(x)}$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Alors $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\},\mathbb{R}^+)$. De plus, ρ s'annule sur $\mathbb{R}^d \setminus \big(\widetilde{\Gamma_0} \cup \{0\}\big)$ et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(D_{-k}x) = 1.$$

Démonstration. Notons, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $Int\,(\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1}) = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \frac{1}{4^{p+2}} < |w(x)| < \frac{1}{4^p}\}$ l'intérieur de $\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1}$. Comme $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} = \cup_{p\in\mathbb{Z}} Int\,(\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1})$, il suffit donc de prouver que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $Int(\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1})$. Soit $x \in\ Int(\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1})$ et $k \leq p-2$. Comme $\frac{1}{4^p} \leq \frac{1}{16}\frac{1}{4^k}$, on a $|w(x)| < \frac{1}{8}\frac{1}{4^k}$. Ainsi $x \notin \widetilde{\Gamma_k}$ et $\gamma(D_{-k}(x)) = 0$ car $D_{-k}(x) \notin \widetilde{\Gamma_0}$. De même si $k \geq p+3$, on a $4\frac{1}{4^k} \leq \frac{1}{4^{p+2}}$ donc $|w(x)| > 2\frac{1}{4^k}$ et $x \notin \widetilde{\Gamma_k}$ and $\gamma(D_{-k}(x)) = 0$. Par suite, la restriction de ϕ à $Int(\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1})$ est la somme finie $\sum_{k=p-1}^{p+2} \gamma \circ D_{-k}$ et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $Int(\Gamma_p \cup \Gamma_{p+1})$ comme somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. La première affirmation de la proposition A.5 est prouvée.
Il est évident que $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus (\widetilde{\Gamma_0} \cup \{0\})$, $\rho(x) = 0$ car γ est à support compact dans $\widetilde{\Gamma_0}$.
Enfin, comme $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, $\phi \circ D_\ell = \phi$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho(D_{-k}x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\gamma(D_{-k}x)}{\phi(D_{-k}x)} = \frac{1}{\phi(x)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(D_{-k}x) = 1.$$

□

Preuve de la proposition A.1.
Soit $r > 0$. Rappelons que $k_0 \in \mathbb{N}^*$ a été choisi tel que que $\frac{\sqrt{2}}{2^{k_0-1}} < r$ de sorte que $\Gamma_k \subset B(0,r)$ pour tout $k \geq k_0 - 1$. Posons

$$\mathcal{C} := \cup_{j\geq k_0+1}\Gamma_j = \big\{x \in \mathbb{R}^d, 0 < |w(x)| \leq (\frac{1}{4})^{k_0+1}\big\}.$$

Remarquons que $B\big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})^{k_0+1}\big) \setminus \{0\} \subset \mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}} \subset B(0,r)$.
Soit $r' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})^{k_0+1}$. Considérons $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, à support compact dans $\bar{\mathcal{C}}$ telle que : $\forall x \in B(0,r')$, $\eta(x) = 1$. Posons : $q_1 := (1-\eta)q$. Comme $q_1 \in \mathcal{C}_c^{\lfloor m \rfloor}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, à support compact dans $\bar{K}_{r',r}$, et que la restriction de q_1 à $K_{r',r}$ appartient à $\mathcal{C}_b^m(K_{r',r},\mathbb{C})$, il résulte de la proposition 1.5, appliquée avec $\mathcal{O} = K_{r',r}$ et $u = q_1$, que $\lim_{\|a\|\to+\infty} \|a\|^{\frac{d-1}{2}}\hat{q}_1(a) = 0$ car $m > \frac{d-1}{2}$.
Nous pouvons donc désormais supposer, quitte à considérer ηq à la place de q, que :

$$\forall x \notin \bar{\mathcal{C}},\ q(x) = 0.$$

Pour prouver que q est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ puis estimer $\hat{q}$, nous allons utiliser la partition de l'unité de la proposition A.5. Observons pour cela que $D_{-k}(\mathcal{C}) = \cup_{j\geq k_0+1} D_{-k}(\Gamma_j) = \cup_{\ell\geq k_0+1-k}\Gamma_\ell$. Donc si $k \leq k_0 - 1$ alors $D_{-k}(\mathcal{C}) \subset \cup_{\ell\geq 2}\Gamma_\ell$. Comme $\widetilde{\Gamma_0} \subset \Gamma_{-1} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, il résulte donc de la proposition A.5 que $\rho \circ D_{-k}$ s'annule sur $\mathcal{C}$ si $k \leq k_0 - 1$. En outre, $q(x) = 0$ si $x \notin \mathcal{C} \cup \{0\}$. Par conséquent, d'après la proposition A.5 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad q(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \rho(D_{-k}x)\, q(x).$$

Soit $k \geq k_0$. En effectuant le changement de variable $t = D_{-k}x$ et en utilisant la proposition A.3, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(D_{-k}x)\,|q(x)|dx = (\frac{1}{2^k})^{d+1} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t)\,|q(D_k t)|dt \leq \frac{K\mathcal{L}_d(\widetilde{\Gamma_0})}{2^{kd}}. \tag{7.14}$$

Comme la série $\sum_{k\geq k_0}\int_{\mathbb{R}^d}\rho(D_{-k}x)\,|q(x)|dx$ converge, la fonction q est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a, pour tout $a\in\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\hat{q}(a):=\int_{\mathbb{R}^d}q(x)\,e^{-i\langle x,a\rangle}\,dx &= \sum_{k=k_0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\rho(D_{-k}x)\,q(x)e^{-i\langle x,\,a\rangle}dx\\ &= \sum_{k=k_0}^{+\infty}(\frac{1}{2^k})^{d+1}\int_{\mathbb{R}^d}\rho(t)\,q(D_kt)e^{-i\langle t,\,D_ka\rangle}dt\\ &= \sum_{k=k_0}^{+\infty}(\frac{1}{2^k})^{d+1}\widehat{\psi_{k,\rho}}(D_ka) \qquad (7.15)\end{aligned}$$

où on a posé pour tout $k\geq k_0$: $\psi_{k,\rho}(t)=\rho(t)\,q(D_kt)\,1_{\widetilde{\Gamma_0}}(t)$, si $t\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ et $\psi_{k,\rho}(0)=0$.

Lemme A.1. *Il existe $C>0$ tel que $\forall k\geq k_0$, $\forall b\in\mathbb{R}^d$, $\|b\|^m|\widehat{\psi_{k,\rho}}(b)|\leq C2^k$.*

Preuve du lemme A.1. Il suffit d'appliquer la proposition 1.5 avec $\mathcal{O}=\big\{x\in\mathbb{R}^d\;:\;\frac{1}{8}<|w(x)|<2\big\}$ et $u=\psi_{k,\rho}$ puis la proposition A.3. Remarquons en effet que $\psi_{k,\rho}\in\mathcal{C}_c^{\lfloor m\rfloor}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, à support compact dans $\widetilde{\Gamma_0}=\bar{\mathcal{O}}$ et que la restriction de $\psi_{k,\rho}$ à $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O},\mathbb{C})$ car les trois fonctions ρ, θ et v appartiennent à $\mathcal{C}_b^m(\mathcal{O},\mathbb{C})$, $|v|$ étant minorée par une constante strictement positive sur $\mathcal{O}$ d'après (7.3). □

Montrons maintenant la propriété asymptotique annoncée sur $\hat{q}(a)$. Comme $m>\frac{d-1}{2}$, on déduit du lemme A.1 et de la proposition A.3 que l'on a pour tout $k>k_0$ et $b\in\mathbb{R}^d$:

$$\|b\|^{\frac{d-1}{2}}|\widehat{\psi_{k,\rho}}(b)|\leq\big(\|b\|^m+1\big)|\widehat{\psi_{k,\rho}}(b)|\leq(C+K)\,2^k.$$

Puis, en utilisant le fait que $\|a\|\leq 4^k\|D_ka\|$, on obtient pour $a\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ et $k>k_0$:

$$\|a\|^{\frac{d-1}{2}}(\frac{1}{2^k})^{d+1}|\widehat{\psi_{k,\rho}}(D_ka)|\leq(4^k)^{\frac{d-1}{2}}(\frac{1}{2^k})^{d+1}(C+K)\,2^k=\frac{C+K}{2^k}. \qquad (7.16)$$

Considérons alors $\delta>0$ et $k_1>k_0$ tel que $\displaystyle\sum_{k=k_1}^{+\infty}\frac{C+K}{2^k}\leq\frac{\delta}{2}$. D'après (7.16), on a : $\forall a\in\mathbb{R}^d$,

$$\|a\|^{\frac{d-1}{2}}\,|\sum_{k=k_1}^{+\infty}(\frac{1}{2^k})^{d+1}\widehat{\psi_{k,\rho}}(D_ka)|\leq\frac{\delta}{2}.$$

D'après le lemme A.1, on a $\forall a\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, $|\widehat{\psi_{k,\rho}}(D_ka)|\leq\dfrac{4^{km}C2^k}{\|a\|^m}$ et comme $m>\frac{d-1}{2}$, on a donc

$$\lim_{\|a\|\to+\infty}\|a\|^{\frac{d-1}{2}}\sum_{k=k_0}^{k_1-1}(\frac{1}{2^k})^{d+1}\widehat{\psi_{k,\rho}}(D_ka)=0$$

Choisissons $A>0$ tel que pour tout $\|a\|\geq A$, $\|a\|^{\frac{d-1}{2}}\displaystyle\sum_{k=k_0}^{k_1-1}(\frac{1}{2^k})^{d+1}|\widehat{\psi_{k,\rho}}(D_ka)|\leq\frac{\delta}{2}$.

Par suite, d'après (7.15), on a, pour tout $\|a\|\geq A$, $\|a\|^{\frac{d-1}{2}}|\hat{q}(a)|\leq\delta$. En d'autres termes, on a bien montré que $\lim_{\|a\|\to+\infty}\|a\|^{\frac{d-1}{2}}\hat{q}(a)=0$. □

Preuve de la proposition A.2.
La preuve de la proposition A.2 est analogue à la précédente. On utilise la proposition A.4 à la place de la proposition A.3. Le terme en $O(2^{-kd})$ de (7.14) devient un terme en $O(2^{-k(d-1+\varepsilon)})$ et l'on obtient par le même procédé l'intégrabilité de la nouvelle fonction q et la même égalité (7.15) avec la nouvelle fonction $\psi_{k,\rho}$. Comme le terme en $O(2^k)$ du lemme A.1 devient un terme en $O(2^{k(2-\varepsilon)})$, on obtient une inégalité analogue à l'inégalité (7.16) avec un terme majorant en $O(2^{-k\varepsilon})$ à la place du majorant de (7.16) en $O(2^{-k})$. On conclut alors de la même façon. $\square$

Preuve des propositions A.3 et A.4.
Nous utiliserons plusieurs fois le résultat élémentaire suivant :

Lemme A.2. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $f, g \in \mathcal{C}_b^\tau(\mathcal{O}, \mathbb{C})$. Alors $fg \in \mathcal{C}_b^\tau(\mathcal{O}, \mathbb{C})$ et :*

$$[fg]_{\tau,\mathcal{O}} \leq \|f\|_{0,\mathcal{O}} [g]_{\tau,\mathcal{O}} + \|g\|_{0,\mathcal{O}} [f]_{\tau,\mathcal{O}}.$$

Les propositions A.3 et A.4 se déduisent facilement des lemmes A.3, A.4 et A.5 énoncés ci-dessous en utilisant la formule de Leibniz et le fait que toutes les dérivées partielles de ρ sont bornées sur $\widetilde{\Gamma_0}$. Les preuves des lemmes A.3-A.4-A.5 sont basées sur la propriété (7.11) et l'inégalité des accroissements finis sur la boule $B(0, \frac{2\sqrt{2}}{2^k})$.
Rappelons que, pour toute fonction $u : B(0,r) \to \mathbb{C}$, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k sur $B(0,r)$ en posant : $\forall x \in B(0,r), \quad u_k(x) = u(D_k x)$.

Lemme A.3. *Soit m un réel supérieur ou égal à 2. Soit $\theta \in \mathcal{C}_b^m(B(0,r), \mathbb{C})$ telle que $\theta(0) = 0$. Il existe $C, C', C'' > 0$ tels que, pour tout $k \geq k_0$:*

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor \;\Rightarrow\; \|\partial^\beta \theta_k\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{C}{2^k} \tag{7.17}$$

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1 \;\Rightarrow\; [\partial^\beta \theta_k]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{C'}{2^k} \tag{7.18}$$

$$|\beta| = \lfloor m \rfloor \;\Rightarrow\; [\partial^\beta \theta_k]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{C''}{4^k} \tag{7.19}$$

Lemme A.4. *Soit m un réel supérieur ou égal à $2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_b^m(B(0,r), \mathbb{C})$ telle que $\theta(0) = 0$ et vérifiant (7.12). Il existe $D, D', D'' > 0$ tels que, pour tout $k \geq k_0$:*

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor \;\Rightarrow\; \|\partial^\beta \theta_k\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq D\,(\frac{1}{2^k})^{2+\varepsilon} \tag{7.20}$$

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1 \;\Rightarrow\; [\partial^\beta \theta_k]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq D'\,(\frac{1}{2^k})^{2+\varepsilon} \tag{7.21}$$

$$|\beta| = \lfloor m \rfloor \;\Rightarrow\; [\partial^\beta \theta_k]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}} \leq D''\,(\frac{1}{2^k})^{2+\varepsilon} \tag{7.22}$$

Lemme A.5. *Soient m un réel supérieur ou égal à 2 et $v \in \mathcal{C}_b^m(B(0,r), \mathbb{C})$ vérifiant (7.2) et (7.3). Il existe $d, d', d'' > 0$ tels que, pour tout $k \geq k_0$:*

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor \;\Rightarrow\; \|\partial^\beta \frac{1}{v_k}\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq d4^k \tag{7.23}$$

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1 \ \Rightarrow \ \big[\partial^\beta \frac{1}{v_k}\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq d' 4^k \tag{7.24}$$

$$|\beta| = \lfloor m \rfloor \ \Rightarrow \ \big[\partial^\beta \frac{1}{v_k}\big]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}} \leq d'' 4^k \tag{7.25}$$

Preuve du lemme A.3. Comme les dérivées partielles premières de θ sont bornées sur $B(0,r)$ et que $\theta(0) = 0$, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in B(0,r)$, $|\theta(x)| \leq M\|x\|$. D'après (7.11), on a donc $\|\theta_k\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq M\sqrt{2}/2^{k-1}$. Soient $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $1 \leq |\beta| \leq \lfloor m \rfloor$ et $x \in B(0,r)$. Alors $|\partial^\beta \theta_k(x)| \leq \frac{1}{2^{k|\beta|}} |(\partial^\beta \theta)(D_k x)|$. Ainsi (7.17) résulte du fait que les dérivées partielles de θ d'ordre $j = 1, \ldots, \lfloor m \rfloor$ sont bornées sur $B(0,r)$. Pour $\beta = 0$, (7.18) est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis car $\|D_k x - D_k y\| \leq \frac{1}{2^k}\|x-y\|$ et les dérivées partielles premières de θ sont bornées sur $B(0,r)$. De même, (7.18) est vérifiée si $1 \leq |\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1$ (plus précisement, $[\partial^\beta \theta_k]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{C'}{4^k}$ dans ce cas). Et enfin, si $|\beta| = \lfloor m \rfloor$ (≥ 2), on a pour tout $(x,y) \in \widetilde{\Gamma_0}^2$:

$$\big|(\partial^\beta \theta_k)(x) - (\partial^\beta \theta_k)(y)\big| \leq \frac{1}{4^k}\big|(\partial^\beta \theta)(D_k x) - (\partial^\beta \theta)(D_k y)\big| \leq \frac{1}{4^k}\frac{1}{2^{k\tau}}\big[\partial^\beta \theta\big]_{\tau,B(0,r)} \|x-y\|^\tau,$$

d'où (7.19). □

Preuve du lemme A.4. Par hypothèse, on a $\theta(0) = 0$, $(\partial_j \theta)(0) = 0$ et $(\partial^2_{j\ell}\theta)(0) = 0$ pour $(j,\ell) \in \{1,\ldots,d\}^2$. Si $|\beta| \leq 2$ alors (7.20) résulte de l'existence d'une constante $K_\beta > 0$ telle que : $\forall x \in B(0,r)$, $|\partial^\beta \theta(x)| \leq K_\beta \|x\|^{2-|\beta|+\varepsilon}$. Pour $2 < |\beta| \leq \lfloor m \rfloor$, (7.20) est évident. Puis (7.21) pour $\beta = 0$ découle de $\|D_k x - D_k y\| \leq \frac{1}{2^k}\|x-y\|$, (7.11) et du fait que les dérivées partielles premières de θ sont majorées en valeur absolue par $C\,(\frac{1}{2^k})^{1+\varepsilon}$ sur $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}})$. Pour $|\beta| = 1$, (7.21) s'obtient de même en tenant compte des dérivées partielles secondes de θ sur $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}})$. Pour $2 \leq |\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1$, les majorations (7.21) sont à établir uniquement si $m \geq 3$: les dérivées partielles d'ordre $|\beta| + 1$ de θ étant bornées sur $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}})$, on a $[\partial^\beta \theta_k]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq C\,(\frac{1}{2^k})^3$. Ce qui termine la preuve de (7.21). Enfin considérons $|\beta| = \lfloor m \rfloor$. Soit $(x,y) \in \widetilde{\Gamma_0}^2$. On a

$$\begin{aligned}
|(\partial^\beta \theta_k)(x) - (\partial^\beta \theta_k)(y)| &\leq (\frac{1}{2^k})^{\lfloor m \rfloor} |(\partial^\beta \theta)(D_k x) - (\partial^\beta \theta)(D_k y)| \\
&\leq (\frac{1}{2^k})^{\lfloor m \rfloor} \big[\partial^\beta \theta\big]_{\tau,B(0,r)} (\frac{1}{2^k})^\tau \|x-y\|^\tau.
\end{aligned}$$

D'où (7.22) car $\lfloor m \rfloor + \tau = m \geq 2 + \varepsilon$. □

La preuve du lemme A.5 utilise le résultat suivant :

Lemme A.6. *Soient m un réel supérieur ou égal à 2 et $v \in \mathcal{C}^m(B(0,r),\mathbb{C})$ vérifiant (7.2) (7.3). Alors il existe $c, c', c'' > 0$ tels que, pour tout $k \geq k_0$:*

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor \ \Rightarrow \ \big\|\partial^\beta v_k\big\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{c}{4^k} \tag{7.26}$$

$$|\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1 \ \Rightarrow \ \big[\partial^\beta v_k\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{c'}{4^k} \tag{7.27}$$

$$|\beta| = \lfloor m \rfloor \ \Rightarrow \ \big[\partial^\beta v_k\big]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{c''}{4^k} \tag{7.28}$$

Preuve du lemme A.6. D'après (7.3), on a $|v_k(x)| \leq b\,|w(D_kx)| \leq \frac{b}{4^k}|w(x)|$, donc, d'après (7.9), $\left\|v_k\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{2b}{4^k}$. Par ailleurs, on a, pour tout $x \in B(0,r)$, $(\partial_1 v_k)(x) = \frac{1}{4^k}(\partial_1 v)(D_kx)$, ce qui implique $\left\|\partial_1 v_k\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{1}{4^k}\left\|\partial_1 v\right\|_{0,B(0,r)}$ et $\forall j \in \{2,\dots,d\}$, $(\partial_j v_k)(x) = \frac{1}{2^k}(\partial_j v)(D_kx)$.

D'après (7.2) et l'inégalité des accroissements finis (chaque dérivée partielle seconde de v est bornée sur $B(0,r)$), il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in B(0,r)$, $|(\partial_j v)(x)| \leq M\|x\|$. De (7.11), il vient que $\left\|\partial_j v_k\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq M\,\frac{2\sqrt{2}}{4^k}$. Ceci prouve (7.26) pour $|\beta| = 1$. Maintenant si $2 \leq |\beta| \leq \lfloor m \rfloor$ alors $(\partial^\beta v_k)(x) = (\frac{1}{4^k})^{\beta_1}(\frac{1}{2^k})^{\beta_2+\dots+\beta_d}(\partial^\beta v)(D_kx)$ pour tout $x \in B(0,r)$, et par conséquent $\left\|\partial^\beta v_k\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{1}{4^k}\left\|\partial^\beta v\right\|_{0,B(0,r)}$. La preuve de (7.26) est ainsi complète.

Prouvons d'abord (7.27) dans le cas $\beta = 0$. Posons $V(x) = v(x) - (\partial_1 v)(0)\,x_1$ pour $x \in B(0,r)$. On a $(\partial_1 V)(0) = 0$ et $(\partial_2 V)(0) = \dots = (\partial_d V)(0) = 0$ par (7.2). Il existe donc $M > 0$ tel que $\forall j \in \{1,\dots,d\}$, $\forall x \in B(0,r)$, $|(\partial_j V)(x)| \leq M\,\|x\|$. Cette majoration et l'inégalité des accroissements finis appliquée dans $B(0,\frac{\sqrt{2}}{2^{k-1}})$ impliquent l'existence de $C' > 0$ tel que l'on ait, pour tout $(x,y) \in \widetilde{\Gamma_0}^2$, $|V(D_kx) - V(D_ky)| \leq \frac{C'}{2^k}\|D_kx - D_ky\| \leq \frac{C'}{4^k}\|x-y\|$. Comme $v_k(x) = V(D_kx) + (\partial_1 v)(0)\frac{x_1}{4^k}$, il existe $C'' > 0$ tel que $|v_k(x) - v_k(y)| \leq \frac{C''}{4^k}\|x-y\|$. D'où $\left[v_k\right]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{C''}{4^k}$.

Etablissons maintenant (7.27) dans le cas $|\beta| \in \{1,\dots,\lfloor m \rfloor - 1\}$. Comme chaque dérivée partielle d'ordre $|\beta| + 1$ de v est bornée sur $B(0,r)$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \widetilde{\Gamma_0}^2$:

$$\begin{aligned}
|(\partial^\beta v_k)(x) - (\partial^\beta v_k)(y)| &\leq \frac{1}{2^{|\beta|k}}|(\partial^\beta v)(D_kx) - (\partial^\beta v)(D_ky)| \\
&\leq \frac{M}{2^{|\beta|k}}\|D_kx - D_ky\| \\
&\leq \frac{M}{2^{|\beta|k}}\frac{1}{2^k}\|x-y\| \\
&\leq \frac{M}{4^k}\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de (7.27). La preuve de (7.28) est analogue à celle de (7.19). □

Preuve du lemme A.5.
Preuve de (7.23). Par (7.3) et (7.9), on a $\|1/v_k\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{2.4^{k+1}}{a}$. Soit $j \in \{1,\dots,d\}$. Avec (7.26) et l'inégalité précédente, on obtient

$$\left\|\partial_j(\frac{1}{v_k})\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \left(\left\|\partial_j v_k\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\right)\left(\left\|\frac{1}{v_k}\right\|^2_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\right) \leq \frac{c}{4^k}\,\frac{4^{2k+3}}{a^2} = \frac{64c}{a^2}4^k.$$

Raisonnons maintenant par récurrence. Soit $\ell \in \{1,\dots,\lfloor m \rfloor - 1\}$. Supposons que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leq \ell$, il existe $C_\beta > 0$ tel que

$$\left\|\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\right\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \leq C_\beta\,4^k.$$

Soit $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| = \ell + 1$. Comme $\partial^\gamma(v_k^{-1}\,.\,v_k) = 0$, la formule de Leibniz donne :

$$\partial^\gamma(\frac{1}{v_k}) = -\frac{1}{v_k}\sum_{\beta\leq\gamma,\,\beta\neq\gamma}\binom{\gamma}{\beta}\partial^\beta(\frac{1}{v_k}).\,\partial^{\gamma-\beta}(v_k). \tag{7.29}$$

D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence et (7.26) :

$$\begin{aligned}
\|\partial^\gamma(\frac{1}{v_k})\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} &\leq \|\frac{1}{v_k}\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \sum_{\beta\leq\gamma,\,\beta\neq\gamma} \binom{\gamma}{\beta}\Big(\|\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\Big)\Big(\|\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\Big) \\
&\leq \frac{2.4^{k+1}}{a} \sum_{\beta\leq\gamma,\,\beta\neq\gamma} \binom{\gamma}{\beta} C_\beta 4^k \frac{c}{4^k} \\
&\leq \left(\frac{8c}{a} \sum_{\beta\leq\gamma,\,\beta\neq\gamma} \binom{\gamma}{\beta} C_\beta\right) 4^k.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de (7.23).

Preuve de (7.24). Supposons $\beta = 0$. En utilisant (7.27) et en procédant comme dans la preuve de (7.23), on obtient $\big[\frac{1}{v_k}\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq \frac{64c'}{a^2}4^k$ car, pour tout $(x,y) \in \widetilde{\Gamma_0}^2$,

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{v_k(x)} - \frac{1}{v_k(y)}| &= \frac{|v_k(x) - v_k(y)|}{|v_k(x)||v_k(y)|} \\
&\leq \frac{1}{a^2}4^{2k+3}\big[v_k\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}}\|x-y\| \\
&\leq \frac{64c'}{a^2}4^k\|x-y\|,
\end{aligned}$$

Examinons maintenant le cas $|\beta| = 1$. Soit $j \in \{1,\dots,d\}$. En utilisant le lemme A.2, (7.26) (7.23) et l'inégalité précédente, on obtient que

$$\begin{aligned}
\big[\partial_j\frac{1}{v_k}\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} &= \big[(\partial_j v_k)\cdot\frac{1}{v_k^2}\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \\
&\leq \|\partial_j v_k\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\big[\frac{1}{v_k^2}\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} + \big[\partial_j v_k\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}}\|\frac{1}{v_k^2}\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}} \\
&\leq \|\partial_j v_k\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\big(2\|\frac{1}{v_k}\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\big[\frac{1}{v_k}\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}}\big) + \big[\partial_j v_k\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}}\big(\|\frac{1}{v_k}\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}\big)^2 \\
&\leq 2\frac{c}{4^k}d4^k\frac{64c'}{a^2}4^k + \frac{c'}{4^k}(d4^k)^2 := c'''4^k.
\end{aligned}$$

Ceci démontre (7.24) pour $|\beta| = 1$. Pour compléter la preuve de (7.24), procédons à nouveau par récurrence. Supposons que, pour un certain $\ell \in \{1,\dots,\lfloor m\rfloor - 2\}$, et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leq \ell$, il existe $D_\beta > 0$ tel que

$$\big[\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\big]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq D_\beta 4^k. \tag{7.30}$$

Soient $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| = \ell+1$ et $\beta \leq \gamma$ tel que $\beta \neq \gamma$. En appliquant le lemme A.2, on a, en simplifiant $\|\cdot\|_{0,\widetilde{\Gamma_0}}$ en $\|\cdot\|_0$ et $[\cdot]_{1,\widetilde{\Gamma_0}}$ en $[\cdot]_1$:

$$\begin{aligned}
\big[\frac{1}{v_k}\cdot\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\cdot\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\big]_1 &\leq \big[\frac{1}{v_k}\big]_1\|\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\cdot\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\|_0 + \|\frac{1}{v_k}\|_0\big[\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\cdot\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\big]_1 \\
&\leq \big[\frac{1}{v_k}\big]_1\|\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\|_0\|\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\|_0 \\
&\quad + \|\frac{1}{v_k}\|_0\Big((\big[\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\big]_1\|\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\|_0 + \|\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\|_0\big[\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\big]_1\Big)
\end{aligned}$$

Comme $|\beta| \leq \ell$, on obtient, en utilisant (7.26), (7.27), (7.23) et (7.30), l'existence d'une constante $L_\beta > 0$ telle que $\left[\frac{1}{v_k}\,\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\,\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\right]_1 \leq L_\beta\,4^k$. L'égalité (7.29) implique alors l'existence d'une constante $D_\gamma > 0$ telle que $\left[\partial^\gamma(\frac{1}{v_k})\right]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq D_\gamma 4^k$. D'où la propriété souhaitée.

Preuve de (7.25). Soit $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\gamma| = \lfloor m \rfloor$. Si $\beta \leq \gamma$, $\beta \neq 0, \beta \neq \gamma$ (donc $|\beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1$ et $|\gamma - \beta| \leq \lfloor m \rfloor - 1$), on a alors $\left[\frac{1}{v_k}\,\partial^\beta(\frac{1}{v_k})\,\partial^{\gamma-\beta}(v_k)\right]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq E\,4^k$ pour un certain $E > 0$ (utiliser le lemme A.2 comme ci-dessus et (7.26) (7.27) (7.23) (7.24)). Posons :

$$s_k = -\frac{1}{v_k} \sum_{\beta \leq \gamma,\, \beta \neq 0, \beta \neq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^\beta(\frac{1}{v_k})\,\partial^{\gamma-\beta}(v_k).$$

D'après (7.29), on a l'égalité : $\partial^\gamma(\frac{1}{v_k}) = -\frac{1}{v_k^2}\,\partial^\gamma v_k + s_k$ et la remarque précédente montre que $[s_k]_{1,\widetilde{\Gamma_0}} \leq E'\,4^k$ pour un certain $E' > 0$. On majore de même $[s_k]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}}$ car $\widetilde{\Gamma_0}$ est borné. Enfin, le lemme A.2 et (7.23) (7.28) nous donnent $\left[\frac{1}{v_k^2}\,\partial^\gamma v_k\right]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}} \leq E''\,4^k$ pour un certain $E'' > 0$. Ce qui conduit à la majoration annoncée de $\left[\partial^\gamma(\frac{1}{v_k})\right]_{\tau,\widetilde{\Gamma_0}}$. $\square$

ANNEXE B. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1.

Pour la commodité du lecteur, nous redonnons ci-dessous l'énoncé du théorème 4.1.

Théorème B.1. *Soient $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$ un espace vectoriel (semi-) normé tels que l'injection canonique $i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_0$ soit compacte. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ tel que $r(T) > 0$. Supposons qu'il existe $\delta \in]0, r(T)[$ et $R > 0$ tels que*

$$\forall f \in \mathcal{B}, \ \|Tf\| \leq \delta\|f\| + R\|f\|_0. \tag{7.31}$$

Soit $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = r(T)$. Alors λ est une valeur propre de T.

Démonstration du théorème B.1.
Soient $u, v \in \mathcal{B}$ tels que $v = (\lambda Id - T)u$. D'après (7.31),

$$|\lambda|\|u\| \leq \|v\| + \|Tu\| \leq \|v\| + \delta\|u\| + R\|u\|_0,$$

d'où

$$\|u\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \delta}\big(R\|u\|_0 + \|v\|\big). \tag{7.32}$$

Soit $(\lambda_n)_n$ une suite de $\rho(T)$ telle que $\lim_n \lambda_n = \lambda$. Alors $\sup_n \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| = +\infty$. Supposons en effet que $M := \sup_n \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| < +\infty$. D'après (3.20), on a alors, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\|(\lambda_p Id - T)^{-1} - (\lambda_q Id - T)^{-1}\| \leq M^2|\lambda_p - \lambda_q|.$$

La suite de Cauchy $((\lambda_n Id - T)^{-1})_n$ est donc une suite convergente de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Notons $U = \lim_n(\lambda_n Id - T)^{-1}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $(\lambda_n Id - T)^{-1}(\lambda_n Id - T) = (\lambda_n Id - T)(\lambda_n Id - T)^{-1} = Id$, on obtient $U(\lambda Id - T) = (\lambda Id - T)U = Id$ et donc que $\lambda Id - T$ est inversible, d'inverse U, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda \in \sigma(T)$.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $f \in \mathcal{B}$ tel que $\sup_n \|(\lambda_n Id - T)^{-1}f\| = +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\lim_n \|(\lambda_n Id - T)^{-1}f\| = +\infty.$$

Posons alors $\alpha_n := \|(\lambda_n Id - T)^{-1}f\|$ et $\phi_n = \frac{1}{\alpha_n}(\lambda_n Id - T)^{-1}f$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\phi_n\| = 1$, la compacité de l'injection canonique i permet de supposer, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, que la suite $(\phi_n)_n$ converge dans $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_0)$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}(\lambda Id - T)(\phi_q - \phi_p) &= (\lambda - \lambda_q)\phi_q + (\lambda_q Id - T)\phi_q - (\lambda - \lambda_p)\phi_p - (\lambda_p Id - T)\phi_p \\ &= (\lambda - \lambda_q)\phi_q - (\lambda - \lambda_p)\phi_p + (\frac{1}{\alpha_q} - \frac{1}{\alpha_p})f\end{aligned}$$

et en considérant (7.32) avec $u = \phi_q - \phi_p$, on a donc

$$\|\phi_p - \phi_q\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \delta}\left(R\|\phi_p - \phi_q\|_0 + |\lambda - \lambda_q| + |\lambda - \lambda_p| + |\frac{1}{\alpha_q} - \frac{1}{\alpha_p}|\|f\|\right) \tag{7.33}$$

Cette dernière inégalité montre que $(\phi_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$. Donc $(\phi_n)_n$ converge dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$. Posons $\phi := \lim_n \phi_n$. Remarquons que $\phi \neq 0$ car $\|\phi\| = \lim_n \|\phi_n\| = 1$. Comme $\lim_n \|T\phi_n - T\phi\| = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \|\lambda_n\phi_n - T\phi_n\| = \lim_n \frac{1}{\alpha_n}\|f\| = 0$, on obtient $T\phi = \lambda\phi$ et λ est bien une valeur propre de T. □

Bibliographie

[1] ALSMEYER G. *On the Markov renewal theorem.* Stoch. Proc. Appl. (1994) 50, 37-56.

[2] ALSMEYER G. *The Markov renewal theorem and related results.* Markov Process. Related Fields 3 (1997), no. 1, 103–127.

[3] ALSMEYER G. *Recurrence theorems for Markov random walks.* Prob. Math. Statist. 21, 123-134 (2001).

[4] BABILLOT M. *Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes.* Ann. I. H. Poincaré, sect. B, Tome 24, No 4, 507-569 (1988).

[5] BABILLOT M. *Le noyau potentiel des chaînes semi-markoviennes.* Thèse de troisième cycle, Université de Paris-VII, 1985.

[6] BALADI V. *Positive transfer operators and decay of correlations.* Advanced Series in Nonlinear Dynamics 16, World Scientific (2000).

[7] BERGH J., LÖFSTRÖM J. *Interpolation spaces. An introduction.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag Berlin (1976).

[8] BOUGEROL PH., LACROIX J. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators.* Progress in Probability and Statistics, Birkhäuser (1985).

[9] BILLINGLEY P. *Probability and Measure.* Wiley series in probability and mathematical statistics (1979).

[10] BLACKWELL D. *A renewal theorem.* Duke Math. J. 15, (1948). 145–150.

[11] BLACKWELL D. *Extension of a renewal theorem.* Pacific J. Math. 3, (1953). 315–320.

[12] BREIMAN L. *Probability* Classic in Applied Mathematics, SIAM, 1993.

[13] D. BURACZEWSKI, E. DAMEK, Y. GUIVARC'H. *Convergence to stable laws for a class of multidimensional stochastic recursions.* Accepted for the publication in Probability Theory and Related Fields (2009).

[14] DAL'BO F., PEIGNÉ M. *Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante.* Études spectrales d'opérateurs de transfert et applications. Astérisque 238 (1996).

[15] CARLSSON H. *Error estimates in D-dimensional renewal theory.* Compositio Mathematica, Tome 46, No 2 (1982), p. 227-253.

[16] CARLSSON H., WAINGER S. *An asymptotic series expansion of the multidimensional renewal measure.* Comput. Math. **47** (1982) pp. 355-364.

[17] CHAZOTTES J.-R., GOUËZEL S. *On almost-sure versions of classical limit theorems for dynamical systems.* Probability Theory and Related Fields 138 :195-234, 2007.

[18] Conze J.P., Raugi A. *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.* Bull. Soc. Math. France, **118** (1990), 273-310.

[19] Conze J.P., Raugi A. *Convergence of iterates of a transfer operator, application to dynamical systems and to Markov chains.* ESAIM Probability and Statistics, **7** (2003) 115-146.

[20] Diaconis P. and Freedman D. *Iterated random functions.* SIAM Rev. **41**, no. 1, 45-76 (1999).

[21] Doney, R. A. *An analogue of the renewal theorem in higher dimensions.* Proc. London Math. Soc. (3) 16 1966 669–684.

[22] Duflo M. *Random Iterative Models.* Applications of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1997).

[23] Durrett R. *Probability : theory and examples.* Wadsworth Brooks (1991).

[24] Erdös P., Feller W., Pollard H. A property of power series with positive coefficients. Bull. Amer. Math. Soc. 55, (1949). 201–204.

[25] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. II.* John Wiley and Sons, New York (1971).

[26] Ferré D. *Théorème de Keller-Liverani et forte ergodicité.* Document de synthèse (http ://www.insa-rennes.fr/deborah-ferre).

[27] Ferré D., Guibourg D., Hervé L. *Regularity of the characteristic functions of additive functionals for iterated functions systems. Statistical applications.* Travail en cours.

[28] Fuh C.D, Lai T.L. *Asymptotic expansions in multidimensional Markov renewal theory and first passage times for Markov random walks.* Adv. in Appl. Probab. **33**, 652-673 (2001).

[29] Gouëzel S., Liverani C. *Banach spaces adapted to Anosov systems.* Ergodic Theory Dyn. Syst. **26**, 189-217 (2006).

[30] Gouëzel S. *Necessary and sufficient conditions for limit theorems in Gibbs-Markov maps.* Preprint (2008).

[31] Guibourg D. *Théorème de renouvellement pour chaînes de Markov fortement ergodiques. Applications aux modèles itératifs Lipschitziens.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 435-438.

[32] Guibourg D., Hervé L. *A renewal theorem for strongly ergodic Markov chains in dimension $d \geq 3$ and in the centered case.* To appear in Potential Analysis.

[33] Guivarc'h Y. *Application d'un théorème limite local à la transcience et à la récurrence de marches aléatoires.* Lecture Notes in Math. Springer, 301-332 (1984).

[34] Guivarc'h Y., Hardy J. *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 24, No 1, p. 73-98 (1988).

[35] Guivarc'h Y. *Limit theorems for random walks and products of random matrices.* Proceedings of the CIMPA-TIFR School on Probability Measures on Groups, Mumbai 2002, TIFR Studies in Mathematics series, 257-332.

[36] Guivarc'h Y., Le Page E. *On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks.* Ergodic Theory Dynam. Systems, 28 (2008) no. 2, pp. 423-446.

[37] Hennion H. *Transience de certaines chaînes semi-markoviennes.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. XVIII, No 3, 1982, p. 277-291.

[38] Hennion H. *Dérivabilité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 27, No 1 (1991) p. 27-59.

[39] Hennion H. *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens.* Proceeding of the A.M.S vol. 118 No 2 (1993) 627-634.

[40] Hennion H. *Limit theorems for products of positive random matrices.* Annals of Probability, 25, 4, (1997) 1545-1587.

[41] Hennion H., Hervé L. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness.* Lecture Notes in Mathematics No 1766, Springer (2001).

[42] Hennion H., Hervé L. *Central limit theorems for iterated random lipschitz mappings.* Annals of Proba. Vol. 32 No. 3A (2004) 1934-1984.

[43] Hennion H. *Quasi-compactness and absolutely continuous kernels.* Probab. Theory Related Fields. **139** (2007) pp. 451-471.

[44] Hennion H., Hervé L. *Stable laws and products of positive random Matrices.* J. Theor. Probab., 21, no. 4 (2008) pp. 966-981.

[45] Hervé L. *Théorème local pour chaînes de Markov de probabilité de transition quasi-compacte. Applications aux chaînes V-géométriquement ergodiques et aux modèles itératifs.* Ann. I. H. Poincaré - PR 41 (2005) 179-196.

[46] Hervé L. *Vitesse de convergence dans le théorème limite central pour chaînes de Markov fortement ergodiques.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **44** No. 2 (2008) 280-292.

[47] Hervé L. *Quasi-compact operators. Applications to geometric convergence rates of Markov chains.* Travail en cours.

[48] Hervé L, Pène F. *The Nagaev-Guivarc'h method via the Keller-Liverani theorem.* Bull. Soc. Math. France, **138** (2010) 415-489.

[49] Hervé L, Pène F. *Study of the recurrent set for planar Markov random walks.* Preprint (2010).

[50] Högnas G. *Markov random walks on groups.* Math. Scand. **58** (1986), 35–45.

[51] C.T. Ionescu-Tulcea, G. Marinescu. *Théorème ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues.* Ann. of Maths. 52 1 (1950) 140-147.

[52] Jacod J. *Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes.* Ann. Inst. H. Poincaré, section B, Tome 7, N 2 (1971), p. 83-129.

[53] Keller G., Liverani C. *Stability of the Spectrum for Transfer Operators.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. CI. Sci. (4) Vol. XXVIII (1999) 141-152.

[54] H. Kesten *Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space.* Annals of Probability, Vol.2,No 3 (1974).

[55] Klüppelberg C, Pergamenchtchikov S. *Renewal theory for functionals of a Markov chain with compact state space.* Ann. Probab. Volume 31, Number 4 (2003), pp. 2270-2300.

[56] Lalley S. *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, noneuclidean tessellations and their fractal limits.* Acta Math. **163** (1989), pp. 1-55.

[57] Le Page E. *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires.* Springer Lecture Notes, 928 (1982) 258-303.

[58] Le Page E. *Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires. Equations aux différences aléatoires.* Séminaires de Rennes (1983).

[59] Le Page E. *Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 25, No 2 (1989) p. 109-142.

[60] Liverani C. *Invariant measures and their properties. A functional analytic point of view.* Dynamical Systems. Part II : Topological Geometrical and Ergodic Properties of Dynamics. Pubblicazioni della Classe di Scienze, Scuola Normale Superiore, Pisa. Centro di Ricerca Matematica "Ennio De Giorgi" : Proceedings. Published by the Scuola Normale Superiore in Pisa (2004).

[61] Merlet G. *Limit theorems for iterated random topical operators.* http ://tel.archives-ouvertes.fr/documents/archives0/00/01/08/13.

[62] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1993).

[63] Milhaud X., Raugi A. *Etude de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un processus auto-régressif : convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence.* Ann. Inst. H. Poincaré Vol. 25 No 4 (1989) 383-428.

[64] Nagaev S.V. *Some limit theorems for stationary Markov chains.* Theory of probability and its applications 11 4 (1957) 378-406.

[65] Ney P., Spitzer F. *The Martin boundary for random walk.* Trans. Amer. Math. Soc. 121 1966 116–132.

[66] Peigné M. *Iterated function schemes and spectral decomposition of the associated Markov operator.* Séminaires de Probabilité de Rennes (1993).

[67] Räbiger F., Wolff M.P.H. *On the approximation of positive operators and the behaviour of the spectra of the appoximants.* Integr. equ. oper. theory. 28 (1997) pp. 72-86.

[68] Rosenblatt M. *Markov processes. Structure and asymptotic behavior.* Springer-Verlag. New York (1971).

[69] Smith W. L. *A frequency function form of the central limit theorem.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **49**, 462-472, 1953.

[70] Spitzer F. *Principles of random walks.* Van Nostrand, Princeton, 1964.

[71] Stam A. J. *Renewal theory in r dimensions.* Compositio Math. 21 1969 383–399.

[72] Thirion X. *Propriétés de mélange du flot des chambres de Weyl des groupes de Ping-Pong.* To appear in Bull. Soc. Math. France (2009).

[73] Uchiyama K. *Asymptotic estimates of the Green functions and transition probabilities for Markov additive processes.* Electronic journal of Probability, **12**, pp. 138-180 (2007).

[74] Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, 1966.